



С.Б. Колоколов

К КОМПЬЮТЕРНОМУ РАСЧЕТУ СЛОЖНЫХ ПЛОСКИХ РАМНЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Рассматривается алгоритм расчета рамной конструкции с вертикальными стойками, соединенными между собой как горизонтальными, так и наклонными ригелями. Примыкание ригелей к стойкам как жесткое, так и шарнирное. Высота этажей и пролеты на разных этажах возможны разные. Реализован метод сил в классическом варианте. Особое внимание уделяется автоматическому анализу расчетной схемы при построении исходных матриц внутренних усилий. Алгоритм реализован в виде Паскаль-программы.

При проектировании и обследовании зданий и сооружений нередко приходится иметь дело с расчетом плоских рам сложной структуры, в которых отдельные ригели могут быть наклонными, узлы соединения их с колоннами в пределах одной схемы как шарнирными, так и жесткими, количество этажей в разных пролетах – разное. Известно, что раскрытие статической неопределимости при использовании компьютеров не представляет сложности, поскольку сводится к последовательности матричных операций. Составление исходных матриц для основной системы в регулярных рамах также не требует больших усилий и легко укладывается в стандартные схемы. Для рам, названных выше рамами сложной структуры выполнение этой задачи требует определенной квалификации. Универсальные вычислительные системы далеко не всегда доступны. В связи с этим представляется полезной разработка алгоритма автоматизированного решения этой задачи, легко реализуемого на компьютере среднего класса.

Расчетная схема.

Рама строительных конструкций как правило имеют вертикальные стойки, поэтому такое ограничение общности вполне уместно, зато существенно упрощает анализ схемы. Основными параметрами схемы являются координаты узлов рамы. Под узлами понимаются места заделки стоек в фундамент и сопряжения стоек с ригелями. Система координат – прямоугольная. Начало координат – в опорном сечении самой левой стойки, ось X направлена горизонтально

вправо, ось Y – вертикально вверх. Вводится строгая система нумерации узлов. Узлом с номером 1 является узел в начале координат. Все остальные узлы нумеруются в последовательности снизу вверх по стойкам. Таким образом номер опорного узла каждой стойки на единицу больше номера самого верхнего узла стойки, расположенной слева.

Кроме нумерации узлов вводится нумерация участков и ригелей. Под участком понимается часть стержня рамы, расположенная между двумя узлами. Нумерация осуществляется автоматически: на стойках участки имеют номер, равный номеру нижнего концевой узла. Ригели нумеруются в последовательности снизу вверх в порядке обхода стоек, к которым примыкают левые концы ригелей. Номера узлов по концам ригелей должны быть заданы при вводе. Первый из участков на ригелях получает номер, на единицу больший чем последний из участков на стойках. Кроме номеров узлов на концах ригелей в исходных данных сообщается также тип примыкания к стойкам: шарнирный (0) или жесткий (1). В исходных данных должны сообщаться относительные жесткости участков.

Нагрузки нумеруются в последовательности их ввода автоматически. Информация о нагрузках включает: номер участка, на котором она расположена, тип (распределенная, сосредоточенная сила, сосредоточенный момент), направление действия (вертикальная, горизонтальная), величина с учетом знака, уточняющего направление (плюс – вниз или вправо), привязка к начальному (меньшему по номеру) узлу участка. Привязка на ригелях дается по горизонтали.

Таким образом, исходная информация включает: количество узлов, стоек и ригелей; массивы координат узлов; массивы информации о ригелях; массив относительных жесткостей участков; массив информации о нагрузках.

Схема расчета.

Алгоритм расчета основан на применении классического метода сил. Формирование матриц коэффициентов и свободных членов системы уравнений метода сил осуществляется путем последовательного суммирования интегралов Мора, вычисляемых для каждого участка. В результате отпадает необходимость хранения в оперативной памяти громоздких исходных матриц внутренних усилий от единичных воздействий неизвестных и внешней нагрузки.

Наиболее сложной задачей является определение изгибающих моментов и продольных сил на участках, поскольку это связано с анализом взаимного положения нагрузки и сечения, в котором определяется внутреннее усилие. Эта задача решается с использованием информационных массивов, часть которых формируется при вводе исходных данных, другая – автоматически. Информационные массивы представляют собой двумерные массивы целых чисел, несущих определенную смысловую нагрузку.

Информационный массив участков (**IU**) содержит пять параметров, характеризующих участки: номера узлов на концах участка, номер стойки, на которой находится участок (для ригеля – номер стойки слева), количество нагрузок на участке. Весь этот массив формируется автоматически на основе информации, имеющейся в исходных данных.

Информационный массив неизвестных (**IX**) содержит для каждого неизвестного: номер участка, где находится неизвестное, обозначение типа неизвестного (1 – вертикальная сила, 2 – горизонтальная сила или продольная, если примыкание шарнирное, 3 – изгибающий момент). Этот массив также формируется автоматически.

Информационный массив ригелей (**IR**) содержит данные о номерах узлов по концам и типе примыкания (0 – шарнирное, 1 – жесткое).

Информационный массив нагрузок (**IP**) формируется при вводе исходных данных и содержит: номер участка с данной нагрузкой, обозначение типа нагрузки (0 – распределенная, 1 – сосредоточенная сила, 2 – сосредоточенный момент).

Формируются также массивы длин участков (**LU**) и углов наклона ригелей (**AU**), вычисляемых по координатам узлов на концах.

Последовательность расчета такова. После ввода исходных данных формируются информационные массивы. Затем осуществляется вычисление длин участков, их проекций на горизонтальную ось (для ригелей), углов наклона ригелей. Следующим этапом является самый трудоемкий: вычисление коэффициентов и свободных членов уравнений метода сил. Как отмечалось выше, этот процесс протекает в последовательности обхода участков рамы. Вначале формируются нулевые матрицы коэффициентов **A** и свободных членов **B**. Здесь используется динамическое расширение памяти, которая освобождается сразу же после решения системы уравнений. Для рассматриваемого участка вычисляются значения изгибающих моментов и продольных сил на концах участка от суммарного действия всех нагрузок на основную систему и элементы четырех массивов: значений изгибающих моментов и продольных сил на концах участка. Вычисляются интегралы Мора для участка с использованием правила трапеций. Кроме того, для нагрузок, непосредственно действующих на этом участке, вычисляются добавки к свободным членам, учитывающие отклонения распределения внутренних усилий на участке от прямолинейного. Полученные значения интегралов добавляются к вычисленным на предыдущих участках и результаты сохраняются.

После формирования матриц **A** и **B** осуществляется решение системы уравнений, контроль точности решения и, в случае необходимости, уточнение решения с помощью метода итераций. Далее вычисляются окончательные значения внутренних усилий по концам участков. Поперечные силы на участках вычисляются по значениям изгибающих моментов. Наконец, на участках, где действует нагрузка, вычисляются значения внутренних усилий в местах расположения сосредоточенных нагрузок, а также находятся места с экстремальными значениями (если они имеются) изгибающих моментов и вычисляется их величина и уточняются поперечные и продольные силы на концах участков. Все полученные данные выводятся в файл результатов, доступный для последующей обработки.

Формирование информационных массивов.

После ввода исходных данных о координатах узлов и номеров узлов сопряжения ригелей со стойками сразу формируется массив информации об участках. Для этого производится обход узлов в порядке возрастания их номеров. Начиная со второго узла анализируются координаты узлов. Если j - номер узла, а k - номер участка, то при выполнении условия $x[j] = x[j - 1]$ участок с номером $k = j - 1$ находится на стойке. Это обстоятельство фиксируется присвоением элементу информационного массива **IU** значения $iu[k,1] = 1$. Здесь k - номер строки, 1 - номер столбца массива **IU**. Кроме того, фиксируются номера начального (нижнего) и конечного (верхнего) узлов участка: $iu[k,2] = j - 1$, $iu[k,3] = j$. Фиксируется также номер стойки, на которой расположен участок. Это выполняется следующим образом. В начале обхода некоторой переменной i присваивается номер 1 и при каждом переходе к узлам следующей стойки (невыполнение условия $x[j] = x[j - 1]$) величина указанной переменной увеличивается на единицу. Номер стойки записывается в массив информации об участках в четвертый столбец: $iu[k,4] = i$. В результате обхода всех узлов получена полная информация об участках на стойках. По окончании обхода узлов на стойках фиксируется количество участков на стойках: $KST = k$. Сведения об участках на ригелях для информационного массива участков заносятся туда после ввода информации о ригелях. Признак принадлежности участка ригелю вырабатывается в первом столбце массива: $iu[k,1] = 0$.

Информационный массив ригелей **IR** формируется сразу же при вводе: первые два элемента его содержат номера левого и правого узлов, а пятый - тип примыкания. Если i - номер ригеля в порядке следования, то $ir[i,1]$ - номер левого узла, $ir[i,2]$ - номер правого узла, $ir[i,5] = 0$, если примыкание шарнирное и $ir[i,5] = 1$, если жесткое. Каждый ригель соединяет две стойки. Для получения информации о номерах этих стоек вначале совершается обход всех ригелей и осуществляется присваивание значений номеров начального и конечного узлов элементам информационного массива участков: $iu[k,2] = ir[i,1]$ и $iu[k,3] = ir[i,2]$, где k - номер участка, а i - номер ригеля, причем $k = i + KST$. Далее для каждого ригеля совершается обход всех участ-

ков, расположенных на стойках. Выполнение условия $iu[j,2] = iu[k,2]$, где j - номер участка на стойке, означает, что номер узла на стойке и номер левого узла на ригеле совпадают, следовательно стойка, где расположен этот узел, находится слева от ригеля. Поскольку элемент массива участков $iu[j,4]$ указывает номер стойки, значит $ir[i,3] = iu[j,4]$. При выполнении условия $iu[j,2] = iu[k,3]$ определяется правая от ригеля стойка: $ir[i,4] = iu[j,4]$.

Нумерация неизвестных осуществляется отдельно от ригелей, поскольку количество неизвестных определяется не только числом ригелей, но и условиями их примыкания к стойкам. Информационный массив неизвестных формируется путем обхода ригелей. Одновременно присваиваются номера неизвестным и устанавливается их количество. При шарнирном примыкании на ригеле одно неизвестное типа продольной силы, при жестком - три неизвестных. При обходе ригелей вначале устанавливается номер ригеля, на котором находится неизвестное и тип неизвестного. Если $ir[i,5] = 0$ (шарнирное примыкание), где i - номер ригеля, то $ix[k,1] = i$ и $ix[k,4] = 2$, где k - номер неизвестного. Если $ir[i,5] = 1$, то примыкание жесткое и тогда: $ix[k,1] = i$, $ix[k+1,1] = i$, $ix[k+2,1] = i$, $ix[k,4] = 1$, $ix[k+1,4] = 2$, $ix[k+2,4] = 3$. При переходе к следующему ригелю величина k увеличивается на единицу, если $ir[i,5] = 0$, и на три, если $ir[i,5] = 1$. Одновременно фиксируются номера стоек слева и справа от неизвестного: $ix[k,2] = ir[i,3]$, $ix[k,3] = ir[i,4]$.

Информационный массив нагрузок включает номера участков, где они расположены, и тип нагрузки. Поскольку в исходной информации указываются номера участков и тип нагрузки, то этот массив может быть сформирован при вводе данных. Если номер нагрузки j , а номер участка, где она действует - k , то $ip[j,1] = k$, $ip[j,2] = 0$, если нагрузка распределенная, $ip[j,2] = 1$, если сосредоточенная сила, $ip[j,2] = 2$, если сосредоточенный момент.

При вводе данных о нагрузках пополняется также массив информации об участках: в пятый элемент записывается количество нагрузок на одном участке $iu[k,5] = n$. Число n определяется в процессе обхода нагрузок: до обхода $iu[k,5] = 0$, а для каждой нагрузки, для которой удовлетворяется равенство $ip[j,1] = k$, производится увеличение элемента $iu[k,5]$ на единицу.

Определение внутренних усилий на концах участка с номером k.

Вначале нужно установить, где находится участок **k**. Поскольку нумерация участков производится в строгом порядке: вначале все участки на стойках, а потом на ригелях, а количество участков на стойках равно **KST**, то выполнение условия $k \leq KST$ означает, что участок находится на стойке (вертикальный), а $k > KST$ - на ригеле (горизонтальный или наклонный). Рассмотрим вначале случай расположения участка на ригеле.

Участок k расположен на ригеле. В этом случае внутренние усилия на участке возникают только в том случае, если нагрузка находится на этом же участке. Определим тип примыкания ригеля к стойкам. Для этого нужно найти номер ригеля $i = k - KST$, поскольку нумерация участков на ригелях начинается после нумерации участков на стойках. Признак типа примыкания ригеля с номером **i** обозначим **t**. Из информационного массива ригелей **IR** находим $t = IR[i,2]$. Для определения усилий на концах участка нужны еще следующие сведения об участке **k** (ригеле **i**): номера узлов на концах участка $u1 = iu[k,1]$, $u2 = iu[k,2]$ из информационного массива участков, длина участка $L = lu[k]$, длина проекции участка на горизонтальную ось $L1 = L \cos(\alpha[i])$, где $\alpha[i]$ - угол наклона ригеля **i** к горизонту.

Теперь можно перейти к вычислению усилий. Вначале рассмотрим влияние неизвестных. Путем перебора неизвестных в порядке нумерации нужно найти те из них, которые располагаются на участке **k**. Это осуществляется с помощью информационного массива неизвестных **IX**. Если для неизвестного с номером **j** выполняется равенство $ix[j,1]=k$, значит оно находится на этом участке. Тип неизвестного $tx=ix[j,2]$. Необходимо вычислить изгибающие моменты и продольные силы по концам участка. Поперечные силы до раскрытия статической неопределимости не понадобятся и их можно найти после вычисления окончательных значений изгибающих моментов. Изгибающие моменты и продольные силы на левом конце участка обозначим **m1** и **n1**, на правом **m2** и **n2**. В дальнейшем будут указываться только формулы для вычисления внутренних усилий, отличающихся от нуля. Формулы для вычисления значений внутренних усилий: при шарнирном примыкании ригеля ($t=0$)

$n1=n2=-1$,
при жестком примыкании ($t=1$) и при $tx=1$

$$m1=L1/2, m2=-m1, n1=n2=\sin(\alpha[i]),$$

при $tx=2$

$$m1=L*\sin(\alpha[i])/2, m2=-m1, n1=n2=-\cos(\alpha[i]),$$

при $tx=3$

$$m1=m2=1.$$

Влияние внешней нагрузки определяется с использованием информационного массива нагрузок **IP**. Если для нагрузки с номером **j** выполняется условие $ip[j,1]=k$, то нагрузка находится на участке. Далее выясняется тип нагрузки из второго столбца информационного массива нагрузок $tp=ip[j,2]$. При шарнирном примыкании ригеля ($t=0$) и распределенной нагрузке ($tp=0$)

$$n1=-p[j]*L1*\sin(\alpha[i])/2, n2=-n1,$$

при сосредоточенной силе ($tp=1$)

$$n1=-p[j]*(L1-Lp[j])*sin(\alpha[i])/L1,$$

$$n2= p[j]*Lp[j]* sin(\alpha[i])/L1,$$

при сосредоточенном моменте ($tp=2$)

$$n1= p[j]*sin(\alpha[i])/L1, n2=n1,$$

где $p[j]$ - величина нагрузки с номером **j**, $Lp[j]$ - привязка расположения силы **j** по отношению к левому концу участка (расстояние по горизонтали). При жестком примыкании ригеля ($t=1$) и при $tp=0$

$$m1=-p[j]*L1*L1/8, m2=m1,$$

$$n1=-p[j]*L1 * \sin(\alpha[i])/2, n2=-n1,$$

при $tp=1$ и $Lp[j] \leq L1/2$ (сила расположена на левой половине ригеля)

$$m1=-p[j]* Lp[j], n1=- p[j] * \sin(\alpha[i]),$$

при $Lp[j] > L1/2$ (сила расположена на правой половине ригеля)

$$m2= -p[j]*(L1 - Lp[j]),$$

$$n2= p[j] * \sin(\alpha[i]),$$

при $tp=2$ и $Lp[j] \leq L1/2$

$$m1= -p[j]$$

при $Lp[j] > L1/2$

$$m2=p[j].$$

Участок k расположен на стойке. Вначале рассмотрим влияние нагрузки, действующей на том же участке. В этом случае отличаются от нуля только изгибающие моменты на нижних концах участков:

при $tp=0$

$$m1= - p[j]*(y[u2] - y[u1])^2/2,$$

при $tp=1$

$$m1= - p[j]*Lp[j],$$

при $tp=2$

$$m1= - p[j].$$

Рассмотрим теперь влияние нагрузки, расположенной на стойке выше участка **k**. Сначала нужно убедиться, что нагрузка находится на

стойке. Это делается по номеру участка i из информационного массива нагрузок. Если номер нагрузки j , то условие расположения ее на одной из стоек: $i = ip[j,1] \leq KST$. Нагрузка с номером j будет воздействовать на участок только в том случае, если она находится на той же стойке, где расположен участок k . Этот случай обнаруживается путем сравнения координат концов участков: поскольку стойка вертикальна абсциссы концов должны совпасть. Предварительно нужно выяснить номера узлов на концах участка с нагрузкой. Из информационного массива участков номера узлов: нижнего - $z1=iu[i,1]$, верхнего - $z2=iu[i,2]$. Условие совпадения стоек с нагрузкой и с участком k : $x[z1]=x[u1]$. Кроме этого должно также выполняться условие $y[z1]>y[u1]$.

Теперь можно записать расчетные формулы: при $tp=0$

$$m1 = -p[j]*(y[z2] - y[z1])*((y[z2] + y[z1])/2 - y[u1]),$$

$$m2 = -p[j]*(y[z2] - y[z1])*((y[z2] + y[z1])/2 - y[u2]),$$

при $tp=1$

$$m1 = -p[j]*(y[z1] + Lp[j] - y[u1]),$$

$$m2 = -p[j]*(y[z1] + Lp[j] - y[u2]),$$

при $tp=2$

$$m1 = -p[j], m2 = m1.$$

Продольные силы отсутствуют, т.к. нагрузка на стойках поперечная.

Далее рассматривается влияние нагрузки, расположенной на ригеле, примыкающем к стойке с участком k . Ригель может примыкать к стойке как слева, так и справа. Формулы для расчета внутренних усилий будут при этом иногда различаться знаками. С целью учета этого обстоятельства введем переменную W , которая принимает значение $W=1$, если ригель примыкает к стойке слева и $W=-1$, если справа. На ригелях располагаются неизвестные усилия, а также может действовать и нагрузка.

Рассмотрим вначале влияние неизвестных. По номеру неизвестного i можно сразу же найти номер участка, где неизвестное расположено: $u=ix[i,1]$, по номеру участка - номера узлов по концам участка: $z1=iu[u,1]$, $z2=iu[u,2]$. Естественно, что для ригеля должно выполняться и условие $u > KST$. Примыкание ригеля с неизвестным i к стойке с участком k определяется выполнением условий:

$$x[z2]=x[u1] \text{ - при примыкании слева } (W=1) \text{ и}$$

$$x[z1]=x[u1] \text{ - при примыкании справа } (W=-1).$$

Влияние неизвестного на участок k имеет место при расположении узла примыкания выше нижнего узла участка k : $y[z2]>y[u1]$ или

$y[z1]>y[u1]$. Теперь нужно установить тип примыкания. Для этого находится номер ригеля $r = u - KST$ и по информационному массиву ригелей - тип примыкания $t=ir[r,2]$. В приведенных ниже формулах для определения усилий на концах участка длина ригеля обозначена L , а длина проекции его на горизонтальную ось - $L1$.

При $tx = ix[i,2] = 1$: $m1 = m2 = L/2$, $n1 = n2 = -W$, при $tx=2$ и $t=0$ (шарнирное примыкание):

$$m1 = ((1+W)(y[u1] - y[z2]) \cos(\alpha[r]) + (1-W)(y[z1] - y[u1]) \cos(\alpha[r])) / 2,$$

$$m2 = ((1+W)(y[u2] - y[z2]) \cos(\alpha[r]) + (1-W)(y[z1] - y[u2]) \cos(\alpha[r])) / 2,$$

$$n1 = n2 = W \sin(\alpha[r]),$$

при $tx=2$ и $t=1$ (жесткое примыкание):

$$m1 = ((1+W)(y[u1] - y[z2]) + L \sin(\alpha[r]) + (1-W) / 2 (y[z1] - y[u1]) - L \sin(\alpha[r])) / 2,$$

$$m2 = ((1+W)(y[u2] - y[z2]) + L \sin(\alpha[r]) + (1-W)(y[z2] - y[u2]) - L \sin(\alpha[r])) / 2,$$

при $tx=3$

$$m1 = m2 = -W.$$

Рассмотрим теперь влияние внешних нагрузок. Тот факт, что внешняя нагрузка находится на одном из ригелей, устанавливается следующим образом: по номеру нагрузки j в информационном массиве нагрузок определяется номер участка $u = ip[j,1]$, где располагается нагрузка и проверяется условие $u > KST$. Если это условие выполняется, то, так же как и ранее, находятся номера узлов на концах участка с нагрузкой $z1$ и $z2$, номер ригеля r , тип примыкания t , устанавливается, с какой стороны от стойки с участком k примыкает ригель и в соответствии с этим назначается параметр W ($W=1$ при примыкании слева и $W=-1$ при примыкании справа). Условием воздействия нагрузки на участок k является неравенство $y[z2] > y[u1]$ при примыкании слева и $y[z1] > y[u2]$ при примыкании справа.

Формулы для определения внутренних усилий имеют вид:

при $tp = ip[j,2] = 0$ (нагрузка на участке распределенная)

$$m1p = m2p = W p[j] L1^2 / 2,$$

$$n1p = n2p = -p[j] L1 / 2,$$

при $tp = ip[j,2] = 1$ и $Lpp[j] > L1/2$ (нагрузка в виде сосредоточенной силы, расположенной справа от середины ригеля)

$$m1p = m2p = W p[j] (L1 - Lpp[j]),$$

$$n1p = n2p = -p[j],$$

при $tp = ip[j,2] = 2$ и $Lpp[j] > L1/2$ (нагрузка в виде сосредоточенного момента, расположенного справа от середины ригеля)

$$m1p = m2p = -p[j].$$

Итак, все условия расположения всех видов нагрузок относительно исследуемых сечений рамы рассмотрены и можно приступать к решению задачи раскрытия статической неопределенности.

Формирование уравнений метода сил

Эта задача при линейном изменении моментов по участку легко решается путем вычисления интегралов Мора с применением правила перемножения трапеций. Для каждого участка k вначале формируются одномерные массивы величин концевых изгибающих моментов $m1$ и $m2$ и продольных сил $n1$ на участке от воздействия единичных значений всех неизвестных, а затем с помощью циклической процедуры вычисляются составляющие коэффициентов $a[i,j]$ для участка k

$$a[i,j] = L ((m1[i] (2 m1[j] + m2[j]) + m2[i] * (2 m2[j] + m1[j])) / (6 gi[k]) + n1[i]^2 / gs[k]).$$

Здесь $gi[k]$ и $gs[k]$ - соответственно изгибная и линейная жесткости участка k .

Затем вычисляются величины изгибающих моментов $mp1$ и $mp2$ и продольных сил $np1$ на концах этого же участка от суммарного действия всех нагрузок и составляющие свободных членов уравнений для участка

$$b[i] = L ((m1[i] (2 mp1 + mp2) + m2[i] (2 mp2 + mp1)) / (6 gi[k]) + n1[i] np1 / gs[k]).$$

Полученные значения запоминаются и происходит переход к следующему участку. Снова формируются массивы внутренних усилий для концов участка, которые размещаются на месте уже не нужных данных предыдущего участка. Таким образом отпадает необходимость хранения в памяти громоздких массивов внутренних усилий для всех участков рамы. Вычисленные составляющие интегралов Мора для каждого участка суммируются с вычисленными ранее и после рассмотрения последнего участка матрицы коэффициентов уравнений метода сил оказываются сформированными.

Что касается свободных членов уравнений, то в них необходимо добавить результат воздействия нагрузок на участки, где эти нагрузки расположены. Прежде, чем записать выражения для этих составляющих, введем некоторые упрощающие запись обозначения:

$$X1 = Lpp[j], X2 = L1 - X1, K1 = X2 / L1, K2 = X1 / L1, K3 = (1 - K1), K4 = (1 - K2).$$

В случае, когда на участке k действует нагрузка $p[j]$:
равномерно распределенная

$$db[i] = p[j] L (L1^2 (m1[i] + m2[i]) / (24 gi[k])) + n1[i] / (2 gs[k])$$

сосредоточенная

$$db[i] = p[j] X1 X2 (X1 (m1[i] K1 + 2 m2[i] K2 / 3 + m1[i] K3 / 3) +$$

$$X2 (2 m1[i] K1 / 3 + m2[i] K2 + m2[i] K4 / 3)) / (2 L1 gi[k] \cos(a[k])$$

$$+ p[j] n1[i] X2 \sin(a[k] / (2 gs[k]).$$

сосредоточенный момент

$$db[i] = - p[j] 2 L1 (X1^2 (m1[i] K1 + 2 m2[i] K2 / 3 + m1[i] K3 / 3) -$$

$$X2^2 (2 m1[i] K1 / 3 + m2[i] K2 + m2[i] K4 / 3)) / (2 L1 gi[k]$$

$$\cos(a[k]).$$

Здесь i - номер свободного члена, j - номер нагрузки, k - номер участка.

Определение значений внутренних усилий

Решение системы уравнений может быть осуществлено с помощью любой стандартной программы, обеспечивающей необходимую точность, например методом Гаусса. В результате решения получается массив величин $XZ[i]$, где i - номер неизвестного. Внутренние усилия на концах участков определяются по формулам

$$Mn = m1p + m1[i] XZ[i],$$

$$Mk = m2p + m21[i] XZ[i],$$

$$Nn = n1p + n1[i] XZ[i],$$

$$Nk = n2p + n2[i] XZ[i],$$

где M_n, N_n - изгибающий момент и продольная сила в начале, а M_k, N_k - в конце участка. Полученные значения являются окончательными, если на участке не действует нагрузка. В противном случае нужно выполнить дополнительно следующие вычисления. Если участок загружен распределенной нагрузкой, то вначале находится величина

$$X = L_1 / 2 - (M_k - M_n) / (p[j] L_1).$$

Если удовлетворяются одновременно неравенства $X > 0$ и $X < L_1$, то на участке изгибающий момент имеет экстремальное значение, которое вычисляется по формуле

$$M_{max} = M_n + p[j] X (L_1 - X) / 2.$$

Если на участке находится одна сосредоточенная сила, то находится изгибающий момент в месте приложения этой силы по формуле

$$M_s = M_n + ((M_k - M_n) + p[j] (L_1 - X_1)) X_1 / L_1.$$

Если на участке действует один сосредоточенный момент, то изгибающий момент в месте действия этой нагрузки вычисляется дважды: одно значение (M_{m1}) до и другое (M_{m2}) за сечением, в котором находится сосредоточенный момент

$$M_{m1} = M_n + (M_k - M_n - p[j]) X_1 / L_1,$$

$$M_{m2} = M_{m1} + p[j].$$

Если на участке действует несколько разных нагрузок, то вначале определяется количество узловых сечений, под которыми понимаются места расположения сосредоточенных нагрузок. Сосредоточенные нагрузки затем нумеруются в последовательности возрастания величины привязки $L_{pp}[j]$ к началу участка. Обозначим через i номер нагрузки в этой последовательности. Создаются временные служебные массивы величин pp , типов tt и привязок L_p этих нагрузок, располагающихся согласно нумерации. Вычисление значений изгибающих моментов в узловых сечениях участка организуется в виде

циклического процесса, во внешнем цикле которого обходятся в порядке очередности все узловые сечения участка, а во внутреннем - нагрузки, действующие на участке, также в порядке нумерации. Обозначим через k номер сечения. Формулу для вычисления изгибающего момента в этом сечении можно записать в виде

$$M[k] = M_n + (M_k - M_n) L_p[k] / L_1 + ? dm[i],$$

Здесь величина добавки $dm[i]$ определяется в зависимости от типа нагрузки $tt[i]$. При $tt[i]=1$ (сосредоточенная сила) и $i > k$

$$dm[i] = pp[i] (L_1 - L_p[i]) L_p[k] / L_1,$$

при $i \leq k$

$$dm[i] = pp[i] L_p[i] (L_1 - L_p[k]) / L_1,$$

при $tt[i]=2$ (сосредоточенный момент) и $i > k$

$$dm[i] = - pp[i] L_p[k] / L_1$$

при $i < k$

$$dm[i] = - pp[i] L_p[k] / L_1 + pp[i].$$

После вычисления значений $M[k]$ от действия всех сосредоточенных нагрузок при наличии на участке еще и распределенной нагрузки анализируются условия на отрезках между узловыми сечениями участка. Длина отрезка с номером i :

$$L[i] = L_p[i+1] - L_p[i],$$

моменты на концах отрезка: $mn = M[i-1]$, $mk = M[i]$ при $i > 1$, а при $i = 1$: $L[1] = L_p[1]$, $mn = 0$, $mk = M[1]$. Вычисляется параметр

$$x = L[i] / 2 - (mk - mn) / (p[j] L_1),$$

где $p[j]$ - интенсивность распределенной нагрузки. Если $x > 0$ и, одновременно, $x < L[i]$, то находится экстремальное значение изгибающего момента

$$m_{max} = mn + p[j] x (L[i] - x) / 2.$$