Д.И.Пастухов, Е.Д.Пастухова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ $\sum a$ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $U_{xx} - U_{yy} + \frac{2}{x+\gamma} U_x = 0$

В работе рассматривается постановка и решение задачи $\sum a$ для уравнения в частных производных второго порядка, когда коэффициент при U_x имеет специальный вид. Это уравнение, являясь рабочим уравнением для решения задач со смещением, позволяет проследить структуру решения. Установлено, что решение задачи $\sum a$ как одной из видов задач со смещением существует и единственно при указанных условиях.

Уравнение $U_{xx} - U_{yy} + \frac{2}{x+\gamma} U_x = 0$ (1) в характеристических координатах принимает вид

$$L(U) = U_{\xi\eta} + \frac{1}{\xi + \eta + 2\gamma}\left(U_\xi + U_\eta\right) = 0. \quad (2)$$

Для уравнения (2) на множестве $D = \bigcup_{i=1}^{3} D_i$,

где $D_1 = \{\xi, \eta : 0 < \xi < \eta < \xi + a\}$;

$D_2 = \{\xi, \eta : \eta > \xi + a; \xi > 0\}$;

$D_3 = \{\xi, \eta : 0 < \eta < \xi < 1\}$, решается задача $\sum a$.

Задача $\sum a$: Найти функцию $U(\xi, \eta)$ со следующими свойствами:

a) $U(\xi, \eta) \in C(\overline{D})$;

b) $L(U) = 0$ в областях D_i, $i = 1,2,3$;

c) $U(\xi, \eta)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\frac{d}{d\xi}\left[U(0, \eta)(\xi + 2\gamma)\right] - U(\xi, \xi + a) = \omega(\xi) \quad \xi \in [0, \infty) \quad (3)$$

$$U(1, \eta) = \psi(\eta) \quad \eta \in [0,1] \quad (4)$$

$$U(\xi, \xi) = \varphi(\xi) \quad \xi \in [1, \infty] \quad (5)$$

d) $U(\xi; \eta)$ удовлетворяет условию сопряжения

$$\lim_{\eta \to \xi \to +0}\left(U_\xi - U_\eta\right) = \lim_{\xi \to \eta \to +0}\left(U_\xi - U_\eta\right) = \nu(\xi) \quad 0 < \xi < 1 \quad (6)$$

В дальнейшем будут указаны ограничения на функции $\omega(\xi); \varphi(\xi); \psi(\eta)$.

Предварительно решаем вспомогательную задачу Sa: Найти решение $U(\xi, \eta)$ уравнения (1) на множестве $D_1 \bigcup D_2, U(\xi, \eta) \in C\left(\overline{D_1 \bigcup D_2}\right)$, за исключением точки (1,1), удовлетворяющее краевым условиям (3) и

$$U(\xi, \xi) = \tau(\xi) \quad \xi \in (0, \infty) \quad (7)$$

Функция при $\eta > \xi$

$$U(\xi, \eta) = \frac{\tau(\xi) + \tau(\eta)}{2} - \frac{1}{2}\int_{\xi}^{\eta} \frac{t + \gamma}{\xi + \eta + 2\gamma}\nu(t)dt, \quad (8)$$

являющейся решением уравнения (1), удовлетворяет условию (7). ПоэтомуЮ принимая во внимание краевое условие (3), с учетом (8), приходим к интегральному уравнению типа Вольтерра

$$\nu^*(\xi) - \int_{\xi}^{\xi + a} \frac{\nu^*(t)}{2\xi + a + 2\gamma} = g(\xi), \quad (9)$$

где $g(\xi) = \tau'(\xi)(\xi + 2\gamma) - \tau(\xi + a) - 2\omega(\xi)$

$\nu^*(\xi) = (\xi + \gamma)\nu(\xi)$

Считаем, в дальнейшем, что функция $g(x)$ такова, что $\forall\, \xi \geq 0$

$$|g(\xi)| \leq K \quad (10)$$

Решение уравнения (9) находим методом последовательных приближений

$$\nu^*(\xi) = g(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\xi). \quad (11)$$

Тогда при (10) имеет место следующая оценка

$$|g_n(\xi)| \leq K\left(\frac{a}{2\xi + a + 2\gamma}\right)^n \leq K\left(\frac{a}{a + 2\gamma}\right)^n.$$

При $a > 0$ потребуем

$$0 < \frac{a}{a + 2\gamma} < 1. \quad (12)$$

При условии (12) ряд (11) сходится равномерно и абсолютно при $\xi > 0$.

Если $a > 1$, а $\omega(\xi) \equiv \varphi(\xi) \equiv 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\xi) = \int_{\xi}^{1} g(t)(2t + a + 2\gamma)^{1/2}(a + 2\xi + 2\gamma)^{-3/2}\,dt. \quad (13)$$

С учетом соотношений (9) и (13) имеем

$$\nu^*(\xi) = g(\xi) + \int_{\xi}^{1} g(t)(2t + a + 2\gamma)^{1/2}(2\xi + a + 2\gamma)^{-3/2}\,dt. \quad (14)$$

Воспользовавшись тем, что при $\eta < \xi$ уравнение (2) имеет решение

$$U(\xi,\eta) = \frac{\tau(\xi) + \tau(\eta)}{2} + \frac{1}{2}\int_{\xi}^{\eta} \frac{t + \gamma}{\xi + \eta + 2\gamma}\nu(t)\,dt \quad (15)$$

и краевым условием (4), получим

$$\psi(\eta) = \frac{\tau(i) + \tau(\eta)}{2} + \frac{1}{2(i + \eta + 2\gamma)}\int_{\eta}^{1} \nu^*(t)\,dt. \quad (16)$$

Продифференцируем обе части тождества (16) по η и воспользуемся соотношением (14) и тем, что $g(\xi) = \tau'(\xi)(\xi + 2\gamma)$. Тогда после ряда громоздких, но не трудных преобразований получаем уравнение Вольтерра второго рода относительно $\tau'(\eta)$.

$$\tau'(\eta) - \int_{\eta}^{1} \tau'(t) K(\eta,t)\,dt = h(\eta), \quad (17)$$

где $K(\eta,t) = \dfrac{P(\eta,t)}{B(\eta)}$; $B(\eta) = \dfrac{2 + \eta + 2\lambda}{2(1 + \eta + 2\gamma)}$

$$P(\eta,t) = \left(\frac{t + 2\gamma}{2(1 + \eta + 2\gamma)^2} + \frac{t + 2\gamma}{2(1 + \eta + 2\gamma)^2}\int_{\eta}^{1} K_0(t,S)\,dS + \frac{(t + 2\gamma)K_0(\eta,t)}{2(1 + \eta + 2\gamma)} \right)$$

$$K_0(\eta,t) = (2t + a + 2\gamma)^{1/2}(2\eta + a + 2\gamma)^{-3/2}$$

$$h(\eta) = \frac{2\psi'(\eta)}{B(\eta)}$$

При $a \ge 1$, $a + 2\gamma > 0$, $\psi'(\eta) \in [0,1]$ (18)
ядро $K(\eta,t)$ уравнения (16) является непрерывным в квадрате $0 \le t$, $\eta \le 1$. $h(\eta)$ - непрерывная функция на сегменте $[0,1]$.

Из теории интегральных уравнений следует, что уравнение (16) однозначно разрешимо в классе функций $\psi'(\eta) = C[0,1]$. Решение этого уравнения запишем в виде $\tau'(\eta) = F(\eta)$, где $F(\eta)$ - известная функция. Решение задачи Коши этого уравнения с начальным условием $\tau(0) = 0$ имеет вид

$$\tau(\eta) = \int_{0}^{\eta} F(t)\,dt \quad (19)$$

Таким образом, при выполнении условий (12), (17) и условий $a > 1$, $\omega(\xi) \equiv \varphi(\xi) \equiv 0$ задача $\sum a$ однозначно разрешима и определяется формулами (8), (14), (15), (19).