

А. Н. Поляков

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПОДХОДА К ПОСТРОЕНИЮ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В МЕТАЛЛОРЕЖУЩИХ СТАНКАХ

Данная работа рассматривает проблему совершенствования тепловой модели за счет изменения ее структуры. При этом рассматривается изменение структуры модели через реализацию вероятностного подхода. В этом случае для отдельных компонентов тепловой модели используются те же модели, что и для детерминированной. Использование вероятностного подхода в тепловом моделировании направлено на достижение адекватности математической модели реальным процессам, происходящим в металлорежущих станках.

Анализ конструкций современных станков выделяет проблему их теплостойкости на одну из ведущих позиций в связи со значительным увеличением скорости быстрых перемещений узлов, частоты вращения шпинделя, мощности главного привода, а также непрерывно повышающимися требованиями к точности обработки [1]. Вместе с этим важнейшим направлением совершенствования процесса проектирования является разработка систем CAD/CAM. Рассматривая тепловое проектирование как проектирование, обеспечивающее оптимальные тепловые характеристики технической системы, а значит и теплостойкость, можно формулировать “совершенствование теплового проектирования металлорежущих станков”, как актуальное направление научных исследований. С начала своего развития САПР постоянно развивались по двум независимым и вместе с тем взаимодополняющим друг друга направлениям. Первое направление связано с совершенствованием сервисных возможностей систем. Второе - с совершенствованием математической модели проектируемого объекта. Если первое направление определяет работоспособность и гибкость САПР в новых условиях ее технического обеспечения, то второе направление отвечает стремлению достижения адекватности математической модели реальным процессам, происходящим в технических системах. Данная работа выполнена в рамках второго направления развития САПР.

Одним из развиваемых в последнее время направлений совершенствования математических моделей различных технических систем является переход от детерминированных моделей к вероятностным и статистическим [2,3]. Учитывая, что температурный процесс в натуральных условиях является нестационарным случайным процессом, а адекватность модели достигается максимальным приближением ее структуры к структуре реального процесса, то для получения адекватных тепловых моделей следует использовать вероятностный подход.

Построение вероятностной тепловой модели предполагает: определение числовых характеристик температуры, как функции случайных величин; построение интегральной функции распределения температуры, позволяющей прогнозировать флуктуации теплового состояния термодинамической системы при заданной неопределенности входных параметров, обусловленных их случайностью; построение плотности распределения температуры для установления ее закона распределения. В качестве гипотетических данных для тепловой модели выбирается система случайных величин, порожденная системой случайных возмущений. При этом все случайные возмущения условно можно разделить на две группы. **Первая группа возмущений** обусловлена как сложными трибологическими процессами в парах трения, являющихся источниками тепла, так и собственно изменчивостью теплового нагруже-

ния в реальных эксплуатационных режимах работы отдельных узлов станка. **Вторая группа возмущений** связана со случайностью процесса теплопередачи, вследствие возможной неоднородности структуры материала и нестабильности условий конвективного теплообмена.

В матричной форме уравнение теплопроводности, описывающее тепловое состояние любой термодинамической системы (с позиций термодинамики металлорежущий станок представляет собой термодинамическую систему) имеет вид [4]:

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{F\} \quad (1)$$

где $[C]$, $[K]$ матрицы теплоемкости, теплопроводности; $\{T\}, \{\dot{T}\}$ - векторы узловых температур и их производных; $\{F\}$ - вектор тепловой нагрузки.

Получить числовые характеристики температуры можно как с использованием плотности распределения температуры, так и без нее. Однако, независимо от выбора подходов к определению числовых характеристик температуры, в силу специфичности математического аппарата вероятностного моделирования, требуется представление функции температуры в удобном для решения определенных интегралов виде. Наиболее оптимальным в этом случае является аналитическое представление. Этот факт накладывает определенные ограничения на выбор метода решения системы (1). Одним из классических методов решения подобных систем признан метод собственных значений [5], тогда для температуры в i -ом узле получим аналитическое представление в виде [6]:

$$T_i = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_{ik} \varphi_{jk} f_j \text{diag}(1 - \exp(-\lambda_k t) / \lambda_k) + \sum_{k=1}^n \varphi_{ik} u_{ok} \exp(-\lambda_k t) \quad (2)$$

где $\varphi_{ik}, \varphi_{jk}$ - элементы матрицы собственных векторов, λ_k - соответствующие собственные значения, u_{ok} - элементы вектора u , определяемых начальными условиями термодинамической системы, $\text{diag}()$ - обозначение диагональной матрицы, n - число узлов расчетной схемы.

В соответствии с конечно-элементной

структурой матриц теплоемкости, теплопроводности и вектора тепловой нагрузки, первая группа возмущений оказывает воздействие только на вектор $\{F\}$, вторая группа возмущений порождает флуктуации всех составляющих решения (2): собственных векторов, собственных значений и вектора тепловой нагрузки. Это позволяет разделить задачу построения вероятностной модели на два самостоятельных этапа. В качестве первого этапа следует рассматривать построение температурного поля при наличии случайных воздействий только от тепловой нагрузки, а в качестве второго этапа - учитывать группу возмущений, воздействующих на все составляющие вектора температуры.

В данной работе рассмотрен только первый этап. Нетрудно убедиться, что вектор тепловой нагрузки может быть представлен в виде суммы неслучайной составляющей и функции случайных величин. При этом в зависимости от выбора объекта моделирования будет специфично окончательное

выражение для температуры как функции случайных величин и ее числовых характеристик, так как в этом случае определяется соответствующая система случайных величин. Выбрав в качестве термодинамической системы шпиндельный узел на опорах качения, случайными величинами будем считать три параметра, определяющих момент трения в опорах: коэффициент f_0 , назначаемый в зависимости от системы смазывания и типа подшипника, вязкость масла V и средний диаметр подшипника D . Выбор данной системы случайных величин объясняется в первую очередь выбором трибологической модели подшипника (для шпиндельных узлов на опорах качения общепринятая модель Пальмгрена), а для данной модели - значительной степенью неопределенности именно этих параметров. В общем случае предложенный набор случайных величин не исчерпывает всю систему случайных величин, составляющих вектор тепловой нагрузки, и может быть расширен, за счет других составляющих момента трения. Но функциональные особенности вероятностного представления момента трения полностью могут быть отражены выбранной системой случайных величин. В соответствии с теорией Пальмгрена представим момент трения $M_{тр}$ в виде сум-

мы неслучайной составляющей M_1 , зависящей от нагрузки, и составляющей момента трения, обусловленной потерями на холостом ходу, как:

$$M_{тр} = M_1 + c \cdot m(f_o, v^{2/3}, D^3) \quad (3)$$

здесь c - неслучайная величина, зависящая только от частоты вращения шпинделя; $m(f_o, v^{2/3}, D^3)$ - функция случайных величин.

Тогда температура T_i в i -ом узле расчетной схемы можно представить в виде:

$$T_i = A_i + \sum_{e=1}^{n_{ist}} b_{ie} \cdot m(f_{oe}, v_e^{2/3}, D_e^3) \quad (4)$$

здесь A_i - неслучайная составляющая температуры, b_{ie} - неслучайные коэффициенты, n_{ist} - число источников тепла.

Отметим, что решение системы (1) в этом случае позволяет вычислять числовые характеристики для отдельной узловой температуры T_i независимо от значений температуры в других узлах, несмотря на наличие функциональной связи между всеми узловыми значениями температур. Выражение (4) позволяет получить диапазон флуктуации температурного поля во всем диапазоне изменения входных случайных величин. Учитывая конкретный вид функции случайных величин $m(f_o, v^{2/3}, D^3)$, математическое ожидание температуры T_i , для любых законов распределения случайных величин примет вид:

$$M[T_i] = A_i + \sum_{e=1}^{n_{ist}} b_{ie} f_{o,cp,e} \cdot \int_{v_{1,e}}^{v_{2,e}} g_1(v) v^{2/3} dv \cdot \int_{D_{1,e}}^{D_{2,e}} g_2(D) D^3 dD \quad (5)$$

где b_{ie} - неслучайный коэффициент, $f_{o,cp,e}$ - математическое ожидание коэффициента f_{oe} , $g_1(V)$, $g_2(D)$ - соответствующие дифференциальные функции распределения для вязкости V и среднего диаметра D , $[V_{2,e}, V_{1,e}]$ - диапазон неопределенности вязкости e -ой опоры, $[D_{2,e}, D_{1,e}]$ - диапазон неопределенности среднего диаметра e -ой опоры.

Приняв различные законы распределения $g_1(V)$, $g_2(D)$, независимо от закона распределения случайной величины f_o , можно получить соответствующие соотношения для математического ожидания температуры. Рассматривая вероятностную тепловую модель, как составляющую математического обеспечения САПР, были приняты два закона

распределения случайных величин - равномерное и нормальное распределения. Этот выбор обусловлен спецификой этапов проектирования. Предполагается принятие равномерного распределения - для этапа эскизного проектирования, а нормального - для этапа технического проектирования и этапа доводки проекта по результатам испытаний опытного образца. Так для равномерного закона распределения всех случайных величин, после нахождения соответствующих первообразных для приведенных в уравнении (5) интегралов, математическое ожидание $M[T_i]$ примет вид:

$$[T_i] = A_i + \sum_{e=1}^{n_{ist}} \eta_e (v_2^{5/3} - v_1^{5/3})_e \cdot (D_2^4 - D_1^4)_e / (\Delta v_e \Delta D_e) \quad (6)$$

где η_e - неслучайные коэффициенты, $\Delta v_e = v_{2,e} - v_{1,e}$; $\Delta D_e = D_{2,e} - D_{1,e}$.

Для более сложных законов распределения, в том числе для нормального, при отсутствии первообразной, интегрирование (5) осуществляется численными методами. Проведенный автором анализ вычислительных параметров точности и быстродействия, используемых численных методов интегрирования, показал, что наиболее эффективными показали себя формулы Ньютона-Котеса с повышенной точностью [7]. Вычисление дисперсии $\text{var}[T_i]$, независимо от законов распределения случайных величин сводится к выражению вида:

$$\text{var}[T_i] = \sum_{k=1}^{n_{ist}} \sum_{e=1}^{n_{ist}} s_k s_e (r_{ke} - p_{ke}) \quad (7)$$

где r_{ke} , p_{ke} , s_k , s_e - коэффициенты, получившиеся в результате решения интегралов, входящих в выражение для дисперсии.

На рис.1. приведен алгоритм формирования математического ожидания и дисперсии температуры. Наличие блоков 2 и 3 и дополнительных двух вложенных циклов ($k, e = 1, n_{ist}$) заметно усложняют алгоритм построения температурного поля и увеличивают вычислительные затраты, причем как видно из рисунка, существенный рост затрат наблюдается при увеличении количества источников тепловыделения. Выполнение блока 2 предполагает предварительное опреде-

ление законов распределения для от вязкости $g_1(\mathbf{V})$ и функции от среднего диаметра $g_2(\mathbf{D})$.

Анализ результатов расчетов вероятностной и детерминированной моделей показал, что математическому ожиданию температуры соответствуют несколько большие значения (рис.2, кривые 1 и 2 соответственно). Большее расхождение наблюдается при выборе закона равномерного распределения для исходных случайных величин. На рис.2. кривая 2 соответствует математическому ожиданию температуры для законов равномерного распределения соответствующих случайных величин. В случае принятия для случайных величин $f_0, \mathbf{V}, \mathbf{D}$ закона нормального распределения, математическое ожидание температуры несущественно уменьшится. Нижняя граница флуктуации температурного поля (кривая 3) и верхняя граница (кривая 4) формируют область флуктуаций температурного поля, определенную в соответствии с выражением (4). Если провести оценку влияния диапазона изменения выбранных случайных величин на флуктуацию температурного поля, то наиболее существенно влияние среднего диаметра шеек шпинделя \mathbf{D} . Влиянием коэффициента f_0 , можно пренебречь, так как его вклад в суммарную дисперсию составляет доли процента. Влияние неопределенности вязкости существенно проявляется лишь при значительном уровне температур.

Для осуществления прогноза о вероятности выхода уровня температур за установленные границы при заданных пределах неопределенности входных случайных величин достаточно воспользоваться процедурой формирования интегральной функции распределения температуры. Вместе с этим, учитывая что в общем случае источников тепловыделения в термодинамической системе станка может быть больше двух, то избежать процедуру построения плотности распределения не удастся.

В общем виде процесс построения функции распределения подчиняется принципу расширяющегося ядра, сочетающего вложенные операции интегрирования и дифференцирования с изменяющейся областью интегрирования. Так для двух источников тепла, рассматривая коэффициент f_0 уже как неслучай-

ную величину, в силу ее несущественного влияния на дисперсию, интегральная функция распределения \mathbf{T} (для упрощения записи подстрочный индекс опущен) имеет вид:

$$G(T) = \frac{1}{b_1 b_2} \cdot \iint_{S_z} (\iint_{S_1} g_1(Z_1) dx_1 dy_1)' \cdot \iint_{S_2} g_2(Z_2) dx_2 dy_2)' dX_1 dX_2, \quad (8)$$

где Z_1, Z_2 – соответствующие функции случайных величин для первого и второго источников; $x_1, y_1, x_2, y_2, X_1, X_2$ – соответствующие независимые случайные величины; b_1, b_2 – диапазоны изменения функций случайных величин для первого и второго источников; S_1, S_2, S_z – соответствующие области интегрирования; $[\dots]'$ – обозначение производной (введенные здесь переобозначения приняты лишь с целью типизации интегрального выражения).

Проведенные автором машинные эксперименты, связанные с построением плотности распределения вероятности показали, что функция распределения температуры при данном наборе случайных величин не подчиняется нормальному и любому другому из известных законов распределения, хотя и напоминает закон Релея и логнормальный. Акцент на нормальный закон сделан не случайно. Во многих работах, рассматривающих вероятностный подход, для температуры принимается именно нормальный закон распределения. Но одной из задач работы было оценить правомочность принятие “общепринятого” нормального закона распределения. Если считать температурное поле, как функцию большого числа независимых случайных величин, в равной степени влияющих на его формирование, то в соответствии с центральной предельной теоремой [8], для него можно принять закон нормального распределения. Отсутствие в данной модели нормального распределения объясняется различной степенью влияния случайных величин. С одной стороны это ведет к усложнению процесса прогнозирования флуктуаций температурного поля. С другой, доказывает необходимость построения собственных законов распределения специфичной функции случайных величин для построения адекватных тепловых моделей.

Анализ проведенных вычислительных экспериментов показал, что в разных узловых точках расчетной схемы кривые распределения температуры имеет один и тот же характер. Отличие наблюдается в численных значениях амплитуд ординат.

Рис.3. представляет кривые распределения температуры в передней опоре шпиндельного узла при различных диапазонах изменения среднего диаметра шеек шпинделя D . При незначительном диапазоне изменения величины ΔD , закон распределения приближается к нормальному (кривая 1), но имеет слишком большую погрешность при стремлении его использования. При значительном (кривая 3) – первая часть кривой распределения от нуля до вершины может быть аппроксимирована без значительной потери точности – прямой. Вторая часть кривой распределения от вершины до нуля может быть аппроксимирована функцией вида:

$$q(t) = a_1 / a_2 \cdot t^{-a_2} - a_3 \cdot (1 - e^{-t}), \quad (9)$$

где a_1 , a_2 , a_3 – коэффициенты; t – время.

Поиск такой функции был вызван необходимостью совершенствования процедуры построения плотности распределения температуры. Так как проведенные вычислительные эксперименты показали, что построение плотности распределения температуры только в одной узловой точке, для одного интервала времени моделирования, реализованное на ПК, на базе процессора Pentium 200 MMX составило более 15 минут. При выборе структуры функции руководствовались условием минимальной погрешности в сопоставлении с кривой распределения, полученной в ходе непосредственного расчета по выражению (8) и минимальным количеством точек кривой распределения, по которым выполняется аппроксимация функции. В данной работе задача построения интерполяционной функции выполнялась, путем решения оптимизационной процедуры, реализующей метод Нелдера-Мида. Отличительной особенностью данной процедуры являлось использование в со-

ставе целевой функции в качестве одного из аргументов, значения вероятности достоверного события, образованного вероятностью попадания в область, ограниченную соответствующими независимыми случайными величинами.

Наибольшее беспокойство вызывает средний диапазон изменения случайных величин, когда дисперсией пренебречь уже нельзя, т.е. отказаться от вероятностной модели, и не удалось получить удачную аппроксимирующую функцию. В этом случае, для минимизации вычислительных затрат, можно предложить осуществление прогнозирования выхода уровня температур за установленные пределы лишь в отдельных характерных точках (например в источниках тепловыделения).

Таким образом, проведенные исследования позволяют сформулировать основные выводы.

В ы в о д ы:

1. Примененный численно-аналитический подход к построению температурного поля позволил свести построение вероятностной тепловой модели к решению типовых задач теории вероятности.

2. Модернизация базового программного комплекса, реализующего детерминированную тепловую модель, не требует существенных затрат, и в основном связана с изменением модуля построения температурного поля, описываемого аналитическим выражением.

3. Закон распределения температуры, как функции случайных величин нельзя априорно считать нормальным. Он определяется выбором системы случайных величин и диапазона их изменения. Кривая распределения температуры для данного представления тепловой модели смещена влево относительно нормального закона, что обусловлено разной степенью влияния случайных величин, на формирование флуктуаций температуры.

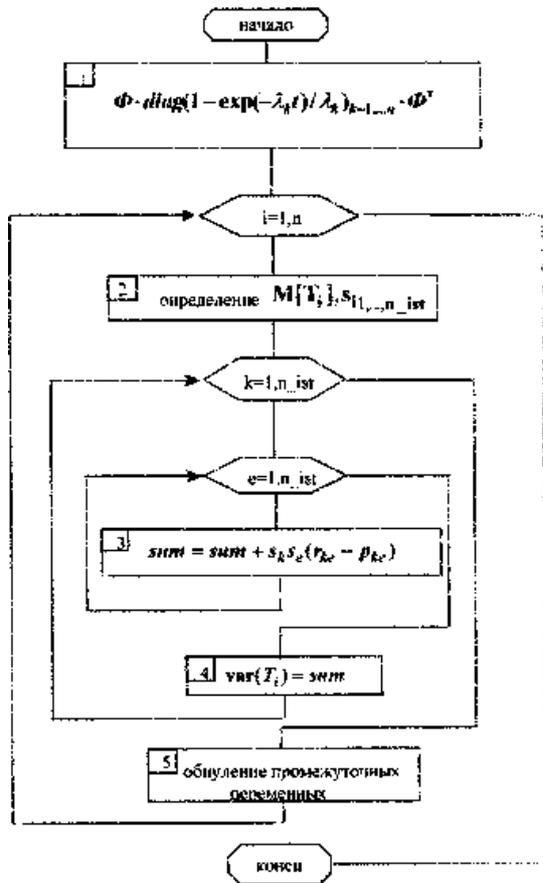


Рис. 1. Алгоритм формирования математического ожидания и дисперсии температурного поля $i=1, n$ - число узлов расчетной схемы; $1, k=1, n_ist$ - число источников тепла, sum - промежуточная переменная.

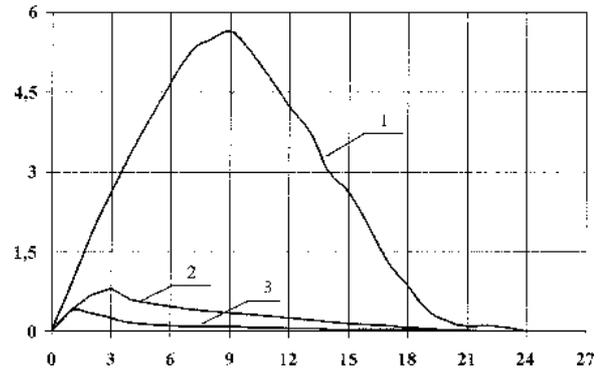


Рис.2. Кривые распределения для различных диапазонов изменения диаметров шеек шпинделя (диапазоны изменения заданы относительно среднего значения диаметров шеек шпинделя): 1- 10 %; 2-40 ^3-80%.

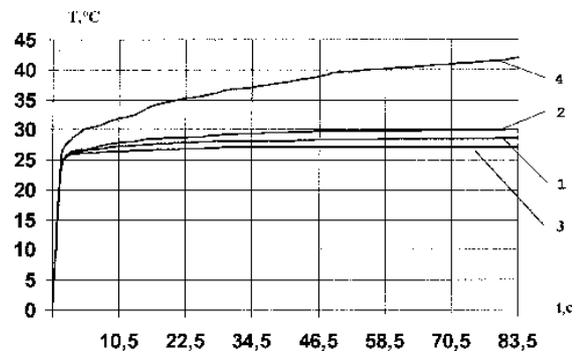


Рис.3. Результаты расчета температуры $T(1)$ 1 - для детерминированной тепловой модели; 2 - математическое ожидание температуры; 3, 4 - предельные значения температуры.

Список использованной литературы

1. Кашепава М.Я., Черпаков Б.И., Судов Е.В. Многоцелевые станки и ГПС на 11.ЕМО в Милане (1995г.)//СТИН.-1996.-№8.-С.37-44.
2. Пуш А.В. Шпиндельные узлы. Качество и надежность.-М.: Машиностроение, 1992. - 228 с.
3. Liu W.K., Belytschko T., Mani A. Применение вероятностного метода конечных элементов к анализу динамики упругопластических тел// Конструирование и технология машиностроения. - 1987. - №1.- С.1 - 9.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: Пер. с англ.-М.: Мир, 1979. -392с.
5. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена: Пер. с англ.- М.: Мир, 1988. - 544 с.
6. Хомяков В.С., Досько С.И., Поляков А.Н. Применение теоретического модального анализа к расчету температурных полей в металлорежущих станках// Изв. Вузов. Машиностроение. 1989.- №9.- С.154-158.
7. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ. - М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1987. - 240 с.
8. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969. - 576 с.