



В.Н.Булатов

МЕТОД ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗОВОГО СПЕКТРА КУСОЧНО-АППРОКСИМИРОВАННОГО СИГНАЛА

В статье приведено решение спектрального преобразования для сигналов, функции которых могут раскладываться в степенной ряд. На этой основе составлена технология определения спектров сечений сигнала, аппроксимированных сплайном. Приведена методика оценки погрешности восстановления функции фазового спектра, обусловленной аппроксимацией.

Одним из основных объектов исследования в информационно-измерительных системах является сигнал, несущий в себе информационную составляющую и помеху. Важнейшим свойством информационной составляющей является отражение инерционных свойств физического объекта измерения. Знание порядка системы, описывающей физический объект, и наличие гладких производных, причем с конечным их числом, в информационной составляющей значительно упрощает выбор аппарата анализа и моделирования подобных сигналов с использованием современных технических и программных средств.

Для получения интерполяционных формул с гладкими производными на конечном интервале аргумента исследуемой функции, представленной выборками (сигнал с выхода АЦП, регистрация фазы по моментам пересечения сигнала через ноль и тому подобное) очень часто используются интерполяционные многочлены Ньютона, Эверетта, Стеффенсена, Гаусса, Бесселя, Стирлинга [1]. Все возрастающее значение получает сплайн-интерполяция [2]. Причем, зачастую достаточно для требуемой точности аппроксимации переносчиков существующих информационных составляющих применить так называемую кубическую сплайн-интерполяцию.

Наличие в интерполяционной формуле конечного числа слагаемых с аргументом в различной (притом невысокой) степени наводит на мысль о необходимости поиска решения спектральной функции именно для такого вида временной функции. Подобное выражение спектральной характеристики было представлено в [3] для временных функций, удовлетворяющих условиям разложения в ряд Тейлора. Эта спектральная характеристика в виде функции плотности была выведена для сигнала $e(t)$, который полностью опреде-

лен на интервале $[t_1, t_2]$, при этом $t_1 = -\tau/2$, $t_2 = \tau/2$, при условии, что для абсолютных значений всех его производных $e^{(i)}(t)$ можно указать некоторое ограничивающее их число. Спектр временной функции, удовлетворяющей перечисленным условиям, представлен (1).

$$S(w) = \frac{2}{w} \left\{ A(w) \sin \frac{w\tau}{2} + B(w) \cos \frac{w\tau}{2} \right\} + j \left\{ C(w) \sin \frac{w\tau}{2} + D(w) \cos \frac{w\tau}{2} \right\}, \quad (1)$$

где

$$A(w) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{(2i)}(0) \sum_{k=0}^i \frac{(\tau/2)^{2(i-k)}}{[2(i-k)]!} \omega^{2k},$$

$$B(w) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{(2i)}(0) \sum_{k=0}^i \frac{(\tau/2)^{2(i-k)}}{[2(i-k)]!} \omega^{2k},$$

$$C(w) = -\sum_{i=0}^{\infty} e^{(2i+1)}(0) \sum_{k=0}^i \frac{(\tau/2)^{2(i-k)}}{[2(i-k)]!} \omega^{2k+1}$$

$$D(w) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{(2i+1)}(0) \sum_{k=0}^i \frac{(\tau/2)^{2(i-k)+1}}{[2(i-k)+1]!} \omega^{2k}$$

Выражение (1) получено в [3] для степенного многочлена. Поэтому оно может быть использовано и для перечисленных выше интерполяций, которые по существу являются степенными многочленами.

В случае несоответствия расположения сигнала на оси t оговоренным выше условиям можно сместить его на нужную величину смещения $t_{см}$ (выравнять), чтобы эти условия выполнялись; при этом в спектральной характеристике появится фазовый множитель $-j\omega t_{см}$.

В таблице 1 приведены зависимости для $A(w)$, $B(w)$, $C(w)$, $D(w)$ для некоторых аппроксимаций фрагментов (аппликат) реальных сигналов, используемых в настоящей работе.

1 Определение спектральной характеристики аппроксимированного сплайн-интерполяционным многочленом сигнала

Некоторые группы измерительных сигналов в фазовых информационно-измерительных системах (ИИС), в силу приобретенных свойств мультипликативного колебательного характера, обусловленного полосовыми и параметрическими свойствами передаточных функций некоторых элементов этих систем, аппроксимировать эффективнее сплайн-интерполяционными многочленами. Причем, как показала практика, достаточно ограничиться третьей степенью, чтобы погрешность определения фазового спектра измерительного сигнала при его анализе в ограниченном диапазоне частот была существенно меньше общей погрешности системы. Основным достоинством для данного случая выступает обеспечение интерполяционным многочленом на границах его определения гладких производных [2].

Таблица 1

$e(t)$ при $ t < \tau/2$ (при $ t > \tau/2$ $e(t) = 0$)	$A(\omega)$	$B(\omega)$	$C(\omega)$	$D(\omega)$
E	E	0	0	0
$E^* \nu \tau$	0	0	$-E^*(\omega \tau)$	$E/2$
$4E^* \tau^2 / \tau^2$	$E^*(1 - 8(\omega^2 \tau^2))$	$4E^*(\omega \tau)$	0	0
$8E^* \tau^3 / \tau^3$	0	0	$-E^*(6(\omega \tau) - 48(\omega^3 \tau^3))$	$E^*(1 - 24(\omega^2 \tau^2))$

Пусть сигнал $e(t)$ на интервале $[T_0, T_k]$ представлен выборками, приведенными в таблице 2.

Таблица 2

Номер выборки	0	1	...	i-2	i-1	i	i+1	...	k-1	k
Момент выборки	T_0	T_1	...	T_{i-2}	T_{i-1}	T_i	T_{i+1}	...	T_{k-1}	T_k
Величина выборки	e_0	e_1	...	e_{i-2}	e_{i-1}	e_i	e_{i+1}	...	e_{k-1}	e_k

Обозначим анализируемый интервал i -го сечения: $\tau_i = T_i - T_{i-1}$. Чтобы воспользоваться выражениями спектральных характеристик приведенных в таблице 1 аппликат, сместим по временной оси выборки сигнала $e(t)$ на величину $t_{см}$ до симметричного расположения выборок e_{i-1} и e_i относительно $t=0$ (выравнивание) таким образом, чтобы имели место следующие равенства:

$$t_{см} = (T_{i-1} + T_i) / 2 ; \tag{2}$$

$$t_i = T_i - t_{см} .$$

Для определения кубической сплайн-функции $s_i(t)$ на интервале $[t_{i-1}, t_i]$ будем использовать так называемый глобальный [2] способ:

$$s_i(t) = -p_{i-1} \frac{(t-t_i)^3}{6\tau_i} + p_i \frac{(t-t_{i-1})^3}{6\tau_i} + \left(\frac{e_i}{\tau_i} - \frac{p_i \tau_i}{6} \right) (t-t_{i-1}) - \left(\frac{e_{i-1}}{\tau_i} - \frac{p_{i-1} \tau_i}{6} \right) (t-t_i), \tag{3}$$

где p_j - вторая производная сплайн-функции в одной из точек $t_j, j \in [i-1, i]$.

Известно, что сплайн-функция позволяет аппроксимировать в границах i -го сечения функцию сигнала тем точнее, чем больше и справа от этого сечения используется число выборок сигнала $e(t)$ для определения значений p_j . Как показал собственный опыт, при малых значениях $t_i (t_i \ll t_B = 1/\omega_B)$, где ω_B - верхняя граничная частота полосы пропускания ИИС) иногда достаточно ограничиться двумя соседними выборками с номерами $i-2$ и $i+1$.

Для обеспечения неискаженного перехода к сплайн-функциям следующих интервалов зададимся краевыми условиями, заключенными в гладкости первых производных:

$$\frac{ds_{i-2}}{dt} = \frac{de_{i-2}}{dt}, \quad \frac{ds_{i+1}}{dt} = \frac{de_{i+1}}{dt}. \tag{4}$$

С учетом выбранных условий интерполяции, для нахождения необходимых значений $p_j, j \in [i-2, i+1]$, можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\tau_{i-1}}{6} p_{i-2} + \frac{\tau_{i-1} + \tau_i}{3} p_{i-1} + \frac{\tau_i}{6} p_i + 0 = \frac{e_i - e_{i-1}}{\tau_i} - \frac{e_{i-1} - e_{i-2}}{\tau_{i-1}}, \\ 0 + \frac{\tau_i}{6} p_{i-1} + \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{3} p_i + \frac{\tau_{i+1}}{6} p_{i+1} + 0 = \frac{e_{i+1} - e_i}{\tau_{i+1}} - \frac{e_i - e_{i-1}}{\tau_i}, \\ \frac{\tau_{i-1}}{3} p_{i-2} + \frac{\tau_{i-1}}{6} p_{i-1} + 0 + 0 = \frac{e_{i-1} - e_{i-2}}{\tau_{i-1}} - \frac{de_{i-2}}{dt}, \\ 0 + 0 + \frac{\tau_{i+1}}{6} p_i + \frac{\tau_{i+1}}{3} p_{i+1} = -\frac{e_{i+1} - e_i}{\tau_{i+1}} + \frac{de_{i+1}}{dt}. \end{cases} \tag{5}$$

Подставляя найденные значения p_{i-1}, p_i из решения системы (5) в выражение (3), найдем интерполяционное выражение $s_i(t)$. Спектральную плотность сигнала, аппроксимированного кубическим сплайном $s_i(t)$, можно определить по формуле (1), если выражение (3) привести к виду:

$$s_i(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \tag{6}$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= \frac{p_i - p_{i-1}}{6\tau_i}, \\ a_2 &= \frac{p_{i-1} t_i - p_i t_{i-1}}{2\tau_i}, \\ a_1 &= \frac{3(p_i t_{i-1}^2 - p_{i-1} t_i^2) + 6(e_i - e_{i-1}) + \tau_i^2 (p_{i-1} - p_i)}{6\tau_i}, \\ a_0 &= \frac{(p_{i-1} t_i^3 - p_i t_{i-1}^3) + 6(e_{i-1} t_i - e_i t_{i-1}) + \tau_i^2 (p_i t_{i-1} - p_{i-1} t_i)}{6\tau_i}. \end{aligned} \right\}$$

Наибольший интерес, с точки зрения практики, представляет случай равномерной по времени (с интервалом t) выборки значений измерительного сигнала. В этом случае моменты выборки значений выравненного сигнала $s_i(t)$ будут следующими:

$$t_{i-2} = -3\tau/2, t_{i-1} = -\tau/2, t_i = \tau/2, t_{i+2} = 3\tau/2. \quad (8)$$

Кроме этого, для вычисления первых производных (4) можно воспользоваться интерполяционным многочленом Лагранжа [2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{de_{i-2}}{dt} &= \frac{-11e_{i-2} + 18e_{i-1} - 9e_i + 2e_{i+1}}{6\tau}, \\ \frac{de_{i+1}}{dt} &= \frac{-2e_{i-2} + 9e_{i-1} - 18e_i + 11e_{i+1}}{6\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

При этом ошибка аппроксимации будет сказываться на функциях, содержащих полиномы выше третьей степени, что вполне согласуется с ошибкой аппроксимации в целом функции сигнала кубическим полиномом. После подстановки (8) и (9) в (5), получим:

$$\left\{ \begin{aligned} p_{i-2} + 4p_{i-1} + p_i + 0 &= \frac{6(e_i - 2e_{i-1} + e_{i-2})}{\tau^2}, \\ 0 + p_{i-1} + 4p_i + p_{i+1} &= \frac{6(e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1})}{\tau^2}, \\ 2p_{i-2} + p_{i-1} + 0 + 0 &= \frac{5e_{i-2} - 12e_{i-1} + 9e_i - 2e_{i+1}}{\tau^2}, \\ 0 + 0 + p_i + p_{i+1} &= \frac{-2e_{i-2} + 9e_{i-1} - 12e_i + 5e_{i+1}}{\tau^2}. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Решение системы уравнений (10) относительно вторых производных p_{i-1} и p_i сплайн-функции $s_i(t)$ будет следующим:

$$\left. \begin{aligned} p_{i-1} &= \frac{e_i - 2e_{i-1} + e_{i-2}}{\tau^2}, \\ p_i &= \frac{e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}}{\tau^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Подставляя (8) и (11) в (7), получаем выражения для a_j :

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= \frac{b_3}{\tau^3}, \quad b_3 = \frac{e_{i+1} - 3e_i + 3e_{i-1} - e_{i-2}}{6}, \\ a_2 &= \frac{b_2}{\tau^2}, \quad b_2 = \frac{e_{i+1} - e_i - e_{i-1} + e_{i-2}}{4}, \\ a_1 &= \frac{b_1}{\tau}, \quad b_1 = \frac{-e_{i+1} + 27e_i - 27e_{i-1} + e_{i-2}}{24}, \\ a_0 &= b_0, \quad b_0 = \frac{-e_{i+1} + 9e_i + 9e_{i-1} - e_{i-2}}{16}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Сравнивая соответствующие слагаемые функции (6) и функции, представленные в таблице 1, устанавливаем:

$$a_0 = E, a_1 = E/t, a_2 = 4E/t^2, a_3 = 8E/t^3. \quad (13)$$

Подставляя значения (13) с учетом (12) в соответствующие табличные выражения $A(w)$, $B(w)$, $C(w)$, $D(w)$, и учитывая линейный характер Фурье-преобразования, со-

ставляем на основе (1) выражение спектральной плотности $S_{B_i}(w)$ для выравненного сигнала $s_i(t)$:

$$S_{B_i}(w) = \frac{2}{w} \left\{ \left[b_0 + b_2 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{w^2 \tau^2} \right) \right] \sin \frac{w\tau}{2} + \frac{b_2}{w\tau} \cos \frac{w\tau}{2} \right\} + j \frac{2}{w} \left\{ \left[\frac{-b_1}{w\tau} - b_3 \left(\frac{3}{4w\tau} - \frac{6}{w^3 \tau^3} \right) \right] \sin \frac{w\tau}{2} + \left[\frac{b_1}{2} + b_3 \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{w^2 \tau^2} \right) \right] \cos \frac{w\tau}{2} \right\}; \quad (14)$$

Определяем спектральную плотность i -го сечения сигнала $e(t)$:

$$S_i(w) = S_{B_i}(w) \cdot \exp(-jw t_{cm}), \quad (15)$$

где t_{cm} определяется в соответствии с (2).

Конечно, у сплайн-интерполяции гораздо больше возможностей по согласованию стыков аппроксимаций соседних отрезков сигнала $e(t)$ (заданное выравнивание на краях, цикличность, равенство вторых производных и так далее). Выбранный здесь вариант, на взгляд автора, является достаточно минимизированным, и в то же время, достаточно эффективным для исследований и измерений параметров динамических систем спектральным методом.

2 Определение спектральной характеристики сигнала непосредственно по производным (прямой метод)

Если по-прежнему при интерполяции по выборкам сигнала $e(t)$ не выходить за полином третьего порядка, то очевидно, что в соответствии с (1) выражения $A_i(w)$, $B_i(w)$, $C_i(w)$, $D_i(w)$ выравненного i -го сечения можно представить через производные сигнала в момент $t=0$. В этом случае

$$A_i(w) = e_i^{(0)} + e_i^{(2)} \left(\frac{(\tau/2)^2}{2} - \frac{1}{w^2} \right), \quad (16)$$

$$B_i(w) = e_i^{(2)} \frac{\tau}{2w}, \quad (17)$$

$$C_i(w) = -e_i^{(1)} \frac{1}{w} - e_i^{(3)} \left(\frac{(\tau/2)^2}{2w} - \frac{1}{w^3} \right), \quad (18)$$

$$D_i(w) = e_i^{(1)} \frac{\tau}{2} + e_i^{(3)} \left(\frac{(\tau/2)^3}{6} - \frac{\tau}{2w^2} \right) \quad (19)$$

Поскольку все производные определяются в момент $t=0$, а значит одна из выборок для точности вычислений [2] должна быть представлена по этому моменту, и по условиям применения интерполяционного многочлена Лагранжа для вычисления производных число выборок в данном случае должно быть больше или равно четырем [2], то минимальное число выборок для вычисления следует брать равным пяти. В таком случае, сигнал $e(t)$ на интервале $[T_o, T_k]$ можно представить следующим образом (таблица 3):

Таблица 3

Номер выборки	0	1	2	...	i-2	i-1	i	i+1	i+2	...	k-1	k
Момент выборки	T_0	T_1	T_2	...	T_{i-2}	T_{i-1}	T_i	T_{i+1}	T_{i+2}	...	T_{k-1}	T_k
Величина выборки	e_0	e_1	e_2	...	e_{i-2}	e_{i-1}	e_i	e_{i+1}	e_{i+2}	...	e_{k-1}	e_k

Обозначим интервал i-го сечения: $t_i = T_{i+1} - T_{i-1}$. Чтобы воспользоваться выражениями (16)-(19), сместим по временной оси выборки сигнала $e(t)$ на величину $t_{см}$ до симметричного расположения выборок e_{i-1} и e_{i+1} относительно $t=0$ (выравнивание) таким образом, чтобы имело место следующее равенство:

$$t_{см} = (T_{i-1} + T_{i+1}) / 2 ; \tag{20}$$

Производные для всех сечений, за исключением двух крайних ($\tau = T_2 - T_0$, $\tau = T_k - T_{k-2}$) вычисляем по следующим формулам, полученных с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа:

$$\begin{aligned} e_i^{(0)} &= e_i , \\ e_i^{(1)} &= \frac{-e_{i+2} + 8 e_{i+1} - 8 e_{i-1} + e_{i-2}}{6 \tau} , \\ e_i^{(2)} &= \frac{-e_{i+2} + 16 e_{i+1} - 30 e_i + 16 e_{i-1} - e_{i-2}}{3 \tau^2} , \\ e_i^{(3)} &= \frac{4(e_{i+2} - 2 e_{i+1} + 2 e_{i-1} - e_{i-2})}{\tau^3} \end{aligned}$$

Производные для сечения $\tau = T_2 - T_0$ вычисляем по формулам:

$$\begin{aligned} e_i^{(0)} &= e_1 , \\ e_i^{(1)} &= \frac{e_4 - 6 e_3 + 18 e_2 - 10 e_1 - 3 e_0}{6 \tau} , \\ e_i^{(2)} &= \frac{-e_4 + 4 e_3 + 6 e_2 - 20 e_1 + 11 e_0}{3 \tau^2} , \\ e_i^{(3)} &= \frac{4(-e_4 + 6 e_3 - 12 e_2 + 10 e_1 - 3 e_0)}{\tau^3} \end{aligned}$$

Производные для сечения $\tau = T_k - T_{k-2}$ вычисляем по формулам:

$$\begin{aligned} e_i^{(0)} &= e_{k-1} , \\ e_i^{(1)} &= \frac{-e_{k-4} + 6 e_{k-3} - 18 e_{k-2} + 10 e_{k-1} + 3 e_k}{6 \tau} , \\ e_i^{(2)} &= \frac{e_{k-4} - 4 e_{k-3} - 6 e_{k-2} + 20 e_{k-1} - 11 e_k}{3 \tau^2} , \\ e_i^{(3)} &= \frac{4(e_{k-4} - 6 e_{k-3} + 12 e_{k-2} - 10 e_{k-1} + 3 e_k)}{\tau^3} \end{aligned}$$

Спектральную плотность $S_{B_i}(w)$ выравненного сечения сигнала вычисляем в соответствии с (16)-(19) и (1). Определяем спектральную плотность i-го сечения сигнала $e(t)$:

$$S_i(w) = S_{B_i}(w) \cdot \exp(-jw t_{см}) ,$$

где $t_{см}$ определяется в соответствии с (20).

3 Оценка погрешности определения фазового спектра при аппроксимации функции сигнала интерполяционным многочленом

Любая аппроксимация фрагментов измерительных сигналов вносит погрешность в определение амплитудного и фазового спектров, так как функция измерительного сигнала, сгенерированного практически любой динамической системой, содержит неопределенное число высших производных. Вопрос оценки погрешности определения фазового спектра в таких случаях оказывается достаточно неоднозначным. Оценки погрешностей рассмотренных выше типов интерполяций и им аналогичных при аппроксимации ими табулированных функций известны [2], но на практике оценить остаточный член интерполяции, не входящий в интерполяционный многочлен, весьма затруднительно. Кроме этого, требуется установить функциональную связь между погрешностями аппроксимации и погрешностями определения функции фазового спектра измерительного сигнала.

Разработанный метод оценки указанной погрешности базируется на предположении, что сигнал $e(t)$, содержащий измерительную информацию в фазовом спектре, имеет спектр, ограниченный справа некоторой частотой $w_B = w_0$. В этом случае для оценки погрешности определения фазового спектра сигнала $e(t)$ в качестве эталона берется фаза j_0 гармонического колебания $U_m \cos(w_0 t + j_0)$ и находится ее отображение j_2 в частотной области от выравненного отрезка длиной t функции $U_m \cos(w_0 t + j_0)$. Делается это следующим образом. Преобразуем носитель эталона:

$$U_m \cos(w_0 t + \varphi_0) = U_m \cos(w_0 t) \cos(\varphi_0) - U_m \sin(w_0 t) \sin(\varphi_0)$$

По условию эта функция существует только на интервале $|t| \leq \tau/2$. Тогда, учитывая линейный характер преобразования Фурье, для определения фазового спектра указанного отрезка можно воспользуемся значениями $A(w)$, $B(w)$, $C(w)$, $D(w)$ для аппликат соответственно $U_m \cos(w_0 t)$, $U_m \sin(w_0 t)$, полученными с помощью выражения (1). Поскольку для первой аппликаты спектр $S_1(w)$ содержит только $Re S_1(w)$, а для второй аппликаты спектр $S_2(w)$ – только $Im S_2(w)$, то функция фазового спектра определяется как аргумент комплексной функции, составленной из двух спектров $\cos(\varphi_0) Re S_1(w)$ и $j \sin(\varphi_0) Im S_2(w)$:

$$\varphi(w) = \arctg [\sin(\varphi_0) Im S_2(w) / \cos(\varphi_0) Re S_1(w)] =$$

$$= \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\left[\frac{-U_m}{w - w_0} \cos \frac{w_0 \tau}{2} \sin \frac{w \tau}{2} + \frac{U_m}{1 - \frac{w_0^2}{w^2}} \sin \frac{w_0 \tau}{2} \cos \frac{w \tau}{2} \right] \sin(\varphi_0)}{\left[\frac{U_m}{1 - \frac{w_0^2}{w^2}} \cos \frac{w_0 \tau}{2} \sin \frac{w \tau}{2} + \frac{-U_m}{\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w}} \sin \frac{w_0 \tau}{2} \cos \frac{w \tau}{2} \right] \cos(\varphi_0)} \right\}$$

Далее определяем фазу φ_z спектральной составляющей с частотой w_0 . После несложного преобразования этого выражения с нахождением предела $0/0$ при $w \rightarrow w_0$ получаем

$$\varphi_z = \varphi(w_0) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{w_0 \tau - \sin(w_0 \tau)}{w_0 \tau + \sin(w_0 \tau)} \operatorname{tg}(\varphi_0) \right\} \quad (21)$$

Очевидными являются следующие особенности поведения $\varphi_z(\tau)$:

- а) при $\tau = \tau_k = k\pi/w_0, k=1, 2, 3, \dots, \varphi_z(\tau_k) = \varphi_0$;
- б) при $\tau \gg 1/w_0, \varphi_z(\tau) \approx \varphi_0$;
- в) при $\tau < \pi/w_0, \varphi_z(\tau) < \varphi_0$.

Учитывая, что в соответствии с теорией о достоверном содержании информации в дискретизированном сигнале, сечения τ_i аналогового сигнала $e(t)$ должны удовлетворять условию: $\tau_i < T_B/2$, где $T_B = 2\pi/w_B$. В нашем случае $\tau_i = \tau, w_B = w_0, T_0 = 2\pi/w_0$, откуда $\tau < T_0/2 = \pi/w_0$. Следовательно, для оценки погрешности при определении фазы спектральной составляющей с частотой $w = w_0$ аппроксимированного на интервале τ по табулированным значениям сигнала $U_m \cos(w_0 t + \varphi_0)$ может быть только случай в).

Оценку указанной погрешности определяем по следующей формуле:

$$\Delta\varphi = |\varphi_a - \varphi_z|,$$

где φ_a - фаза спектральной составляющей с частотой $w = w_0$ аппроксимированного на интервале τ по табуляграмме сигнала $U_m \cos(w_0 t + \varphi_0)$.

Предварительный анализ численных значений данной погрешности показал, что $\Delta\varphi$ зависит от φ_0 и имеет экстремумы в окрестности $\varphi_0 = \pi/4 \pm k(\pi/2), k=0, 1, 2, 3, \dots$ ($\Delta\varphi=0$ при

$\varphi_0 = \pm k\pi$ и $\varphi_0 = \pi/2 \pm k\pi$). При $\varphi_0 = \pi/4 \pm k(\pi/2)$ зависимость (21) преобразуется:

$$\varphi_z = \varphi(w_0) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{w_0 \tau - \sin(w_0 \tau)}{w_0 \tau + \sin(w_0 \tau)} \right\}$$

Все проведенные расчеты и их анализ показали, что для практического использования рассмотренной оценки погрешности в области измерений параметров фазового спектра при различной аппроксимации сигнала на интервале τ достаточно ограничиться полиномами третьей степени. По результатам расчетов с использованием одного из видов аппроксимации (прямой метод) ниже представлены зависимости функции погрешности $\Delta\varphi(\tau)$ при определении фазы спектральной составляющей с частотой $w = w_0$ аппроксимированного на интервале τ , где производные вычислялись по пяти значениям сигнала $U_m \cos(w_0 t + \pi/4)$ на интервале 2τ .

На рисунке приведены зависимости φ_z и φ_a , позволяющие графически определить $\Delta\varphi$ при $\tau \geq 0,4 * T_0$. Для определения значений $\Delta\varphi$ (в градусах) при $0,01 T_0 < \tau < 0,4 * T_0$ установлена следующая зависимость: $20 \lg(\Delta\varphi) = (-200 + 12 * k) \text{ дБ}$, где k - десятичное изменение τ / T_0 , начиная от значения $\tau / T_0 = 0,01$.

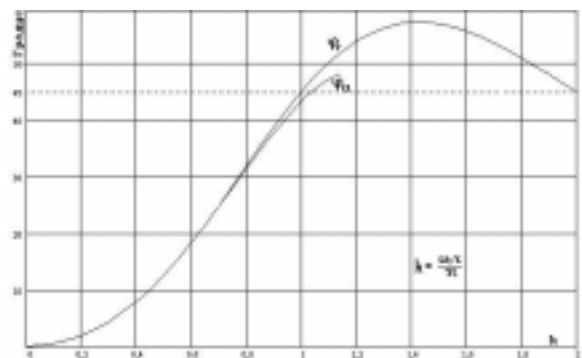


Рисунок - Графики составляющих фазовых спектров j_z и j_a соответственно отрезка синусоиды и ее аппроксимации

Список использованной литературы

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и уч-ся вузов.- 13-е изд., испр.- М.: Наука, Гл. ред. ф.-мат. л-ры, 1986.-544 с.
2. Волков Е.А. Численные методы -М.: Наука, Гл. ред. ф.-мат. л-ры, 1987.-248с.
3. Булатов В.Н. Спектральная характеристика для обобщенного сигнала с динамическими параметрами/ Анализ структур электронной и вычислительной техники: Межвуз. сб. научн. тр.- Оренбург, ОГТУ.- 1995.- С. 25-30.

Статья поступила в редакцию 11.08.99