

ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ ПО КОЛЛЕКТИВНОМУ ПРИНЯТИЮ РЕШЕНИЙ

Доказано, что широко распространенные процедуры коллективного принятия решения на одном и том же профиле предпочтений экспертов приводят к разному агрегированному решению. Приводится характеристика этих процедур на основе некоторых аксиом состоятельности. Показано, что степень адекватности процедур тем выше, чем большему числу таких нормативных требований они удовлетворяют.

Одним из обязательных элементов коллективной деятельности, придающим ей целенаправленный характер, является выбор. В настоящей статье предложена методика совершенствования группового выбора, осуществляемого в форме голосования, основанная на аксиоматической характеристике процедур голосования.

Целью данной статьи является поиск адекватной процедуры голосования, отображающей индивидуальные мнения избирателей в агрегированное решение.

Демократическое общество широко использует результаты голосования для принятия коллективных решений в тех областях, где неопределенность существенных факторов не позволяет использовать детерминированные или вероятностные модели для анализа имеющихся альтернатив.

Интерес к процедурам голосования отмечен уже в работах античных философов – Платона младшего, Архимеда, Аристотеля. По-видимому, наиболее древним методом коллективного выбора является выбор по простому большинству голосов – избирается вариант, набравший больше голосов, чем другие. Судьба поверженного в поединке гладиатора решалась большинством голосов.

Позже, в средние века, процедура голосования по правилу простого большинства стала официальным способом голосования в Англии и притом не только как конституционный способ голосования при избрании первых парламентов, но и при голосовании в малых группах – в самом парламенте и его комиссиях. Сейчас правило большинства – будь это относительное или абсолютное большинство – является настолько распространенным, что его отождествляют с процедурой голосования как таковой.

Первая серьезная попытка критического анализа процедур голосования была предпринята во Франции в конце XVII века. Академики Жан-Шарль де Борда и маркиз де Кондорсе были первыми учеными, которые, используя методику «умозрительного эксперимента», а также привлекая математические методы, заметили, что правило простого большинства может приводить к избранию такого кандидата, который при парном сравнении по правилу большинства уступает любому другому кандидату, и предложили каждый свою процедуру голосования, которые в теории голосования так и называются: правилом Борда и правилом Кондорсе.

В настоящее время известны десятки различных процедур голосования, но три отмеченные выше: правило большинства, правило Борда, правило Кондорсе – являются определяющими для классов производных процедур.

Процедура голосования состоит из трех этапов:

1 этап. Каким-либо способом формируется набор вариантов (называемых также кандидатами, альтернативами, исходами, предъявлением), в отношении которых должно быть принято решение.

2 этап. Каждый избиратель (называемый также выборщиком, экспертом, агентом) осуществляет свой индивидуальный выбор.

3 этап. В соответствии с конкретной процедурой формируется коллективное решение.

На рис. 1 приведена блок-схема процедуры голосования.

При классификации процедур по виду информации учитывается, в какой форме индивидуальные решения избирателей поступают на блок агрегирования и в какой форме вырабатывается коллективное решение.

В данной статье мы выделим 2 типа индивидуальных решений избирателей:

- 1) индивидуальный выбор одного или нескольких кандидатов из предъявления;
- 2) упорядочение всего множества кандидатов.

Совокупность индивидуальных выборов избирателей назовем профилем индивидуальных выборов.

Совокупность индивидуальных упорядочений назовем профилем индивидуальных упорядочений.

В случае, если упорядочение – линейный порядок на множестве кандидатов (т. е. полное, асимметричное, транзитивное бинарное отношение), будем говорить о профиле индивидуальных предпочтений.

В данной статье коллективное решение также представляется:

- 1) коллективным выбором одного или нескольких кандидатов из предъявления;
- 2) агрегированным упорядочением всего множества кандидатов.

Таким образом, по виду информации процедуры голосования подразделяются на 4 группы:

- 1) процедуры, вырабатывающие по профилю индивидуальных упорядочений коллективное упорядочение (кратко: процедуры типа УУ);
- 2) процедуры, вырабатывающие по профилю индивидуальных выборов коллективный выбор (процедуры типа ВВ);

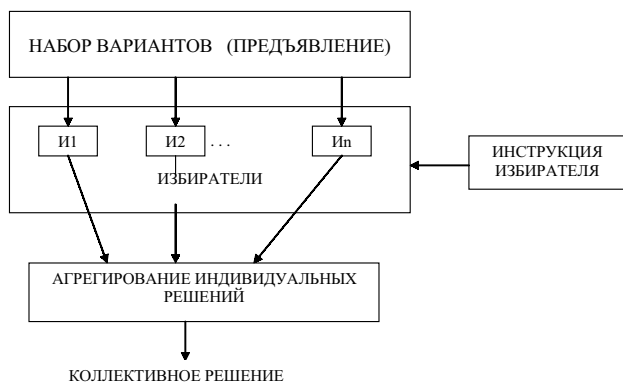


Рисунок 1. Блок-схема процедуры голосования

3) процедуры, вырабатывающие по профилю индивидуальных упорядочений коллективный выбор (процедуры типа УВ);

4) процедуры, вырабатывающие по профилю индивидуальных выборов коллективное упорядочение (процедуры типа ВУ).

Процедуры голосования допускают также классификацию по направлению информационного потока:

1) Однонаправленные процедуры голосования.

В таких процедурах информационный поток передается в одном направлении (от избирателей в блок агрегирования индивидуальных предпочтений, вырабатывающий окончательный коллективный выбор, – рис. 1). При этом какие-либо дополнительные условия на результат действия процедуры не накладываются.

2) Процедуры с обратными связями.

В реальных ситуациях часто не удается выработать коллективное решение за один шаг и приходится усложнять процедуру голосования, используя различные итерационные процессы. В блок-схему процедуры голосования на рис. 1 вводится «блок оценки коллективного решения» ниже «блока агрегирования индивидуальных решений», и лишь затем либо вырабатывается коллективное решение, либо инициализируется обратная связь. По виду применяемой обратной связи процедуры голосования подразделяются на следующие типы:

А) Пересчетные процедуры без повторного обращения к избирателям.

В процедурах этого типа избиратели заполняют бюллетени один раз и в дальнейшем в ходе процедуры участия не принимают. Бюллетени поступают на блок агрегирования. Коллективное решение, вырабатываемое блоком агрегирования, сравнивается с требованиями, заложенными в блок оценки альтернатив. Альтернатива либо принимается, либо осуществляется пересчет в блоке агрегирования.

Б) Процедуры с обратной связью на блок формирования предъявления.

В) Процедуры с обратной связью на блок выработки инструкций.

Существенно, что все избиратели на каждом этапе получают одинаковую инструкцию (хотя и меняющуюся от этапа к этапу) и одинаковый избирательный бюллетень.

Г) Процедуры, использующие группировки или ранжирования избирателей.

В процедурах этого класса обращение к отдельным избирателям или группам, составленным из них, производится не одновременно, так что результаты голосования одной группы избирателей непосредственно влияют на формирование предъявления следующей группе избирателей.

Д) Процедуры поиска согласованного решения.

В процедурах этого класса коллективное решение, выработанное блоком агрегирования на первом этапе, сообщается избирателям. Избиратели, зная это коллективное промежуточное решение, вновь заполняют бюллетени, руководствуясь не только собственными предпочтениями, но и промежуточным коллективным решением.

Приведем примеры формирования коллективного выбора для процедур типа УВ.

Определение 1. Правило относительного большинства

Каждый избиратель отдает свой голос наиболее предпочтительному для себя кандидату. Выбирается кандидат, упомянутый в наибольшем количестве бюллетеней (случай равенства голосов пока не рассматриваем).

Определение 2. Правило Борда

Каждый избиратель объявляет свои предпочтения, ранжируя всех r кандидатов от лучшего к худшему (безразличия запрещаются). Кандидат не получает очков за последнее место, получает 1 очко за предпоследнее место и т. д., получает $r - 1$ очков за 1 место. Он называется победителем по Борда (случай равенства очков опускаем).

Определение 3.

Для заданного профиля предпочтений победителем по Кондорсе называется кандидат

а, который побеждает любого другого кандидата при парном сравнении по правилу большинства: для всякого кандидата b , отличного от a , число избирателей, считающих, что a лучше b ($a > b$), больше, чем тех, кто считает, что b лучше a .

Состоятельное по Кондорсе правило выбирает победителя по Кондорсе, если такой существует.

Пример 1. Рассмотрим профиль предпочтений 21 избирателя по 4 кандидатам (назовем этих кандидатов a, b, c, d).

Избиратели	3	5	7	6
	a	a	b	c
	b	c	d	b
	c	b	c	d
	d	d	a	a

По правилу относительного большинства побеждает кандидат a – 8 голосов. Но в действительности a является наихудшим кандидатом для явного большинства избирателей – для 13.

По правилу Кондорсе победит кандидат c , т. к. $c > a$ (13 голосов «за», 8 – «против»), $c > b$ (11 голосов «за», 10 голосов – «против»), $c > d$ (14 голосов «за», 7 – «против»).

По правилу Борда, очевидно, победит кандидат b .

Вывод: 3 наиболее известные процедуры голосования дают разные коллективные решения на одном и том же профиле индивидуальных предпочтений, причем наиболее известное правило относительного большинства выбирает кандидата, наименее предпочтительного для абсолютного большинства избирателей.

Состоятельность по Кондорсе определяет избираемого кандидата только для части профилей, а именно для тех профилей, для которых победитель по Кондорсе существует. Если победителя по Кондорсе нет, то мы имеем конфигурацию предпочтений, называемую парадоксом Кондорсе. В этом случае парные сравнения вариантов по правилу большинства образуют цикл.

Пример 2. Парадокс Кондорсе – циклы правила большинства.

Рассмотрим следующий профиль предпочтений 21 избирателя по 3 кандидатам.

Избиратели	8	7	6	8
	a	b	c	a
	b	c	a	b
	c	a	b	c
	8	7	6	8

Здесь $a > b$ (14 – за, 7 – против), $b > c$ (15 – за, 6 – против), $c > a$ (13 – за, 8 – против).

Вывод: победитель по Кондорсе отсутствует, т. к. $a > b > c > a$.

На самом деле парадокс голосования – не редкое явление и с ростом числа кандидатов становится все более наблюдаемым.

Состоятельное по Кондорсе правило голосования в случае, если победитель по Кондорсе не существует, выбирает разумную ему замену. Ниже рассмотрим два наиболее известные состоятельные по Кондорсе правила: Копленда и Симпсона.

Отметим фундаментальное противоречие между требованием состоятельности по Кондорсе и идеей любого метода, основанного на подсчете очков, заданных в ранговой шкале.

Определение 4. Правила голосования с подсчетом очков

Фиксируем неубывающую последовательность действительных чисел

$$s(0) \leq s(1) \leq \dots \leq s(p-1), \text{ где } s(0) < s(p-1).$$

Избиратели ранжируют кандидатов, причем за последнее место дается $s(0)$ очков, за предпоследнее место $s(1)$ очков и т. д. Избирается кандидат с максимальной суммой очков.

Пример 3. Правило Борда и правило относительного большинства являются правилами с подсчетом очков (при относительном большинстве $s(0) = s(1) = \dots = s(p-2) < s(p-1)$).

Утверждение (Фишберн). Существуют профили, при которых победитель по Кондорсе не может быть избран ни при каком методе подсчета очков.

Рассмотрим профиль с 7 избирателями и 3 кандидатами:

Избиратели	3	2	1	1	Очки
	c	a	a	b	$s(2)$
	a	b	c	c	$s(1)$
	b	c	b	a	$s(0)$

Здесь победитель по Кондорсе – кандидат с.

Но если $s(0) < s(1) < s(2)$, то побеждает кандидат а:

$$\text{очки } a = 3s(2) + 3s(1) + s(0) > 3s(2) + 2s(1) + 2s(0) = \text{очки } c.$$

$$\text{очки } b = s(2) + 2s(1) + 4s(0) < \text{очки } a.$$

Сопоставим правила голосования с подсчетом очков и состоятельные по Кондорсе правила по их нормативным свойствам. Ниже перечислены 3 основных нормативных свойства для правил голосования.

Оптимальность по Парето. Если определенный вариант для всех избирателей лучше другого варианта, то другой вариант не может быть избран.

Анонимность. Имена избирателей не имеют значения: если 2 избирателя поменяются голосами, то результаты выборов не изменятся.

Нейтральность. Имена кандидатов не имеют значения. Если мы поменяем местами кандидатов а и b в предпочтении каждого избирателя, то и исход выборов изменится соответственно: если раньше выбирался а, то теперь будет выбираться b и наоборот; если избирался некоторый с, отличный от а, b, то он же и будет избран.

Выше было сказано, что в случае парадокса Кондорсе лучше применять какие-либо состоятельные по Кондорсе правила. Далее определены 2 наиболее известные обобщения победителя по Кондорсе.

Определение 5. Правило Копленда

Сравним кандидата а с любым другим с. Начислим ему +1, если для большинства $a > c$, –1, если для большинства $c > a$, 0 очков при равенстве. Суммируя общее количество очков по

всем c , отличным от a , получаем оценку Копленда для a . Избирается кандидат, называемый победителем по Копленду, с наивысшей из таких оценок.

Определение 6. Правило Симпсона

Рассмотрим кандидата a , любого другого кандидата c и введем обозначение $N(a,c)$ – число избирателей, для которых $a > c$. Оценкой Симпсона для a назовем $\min N(a,c)$, взятый по всем c , отличным от a . Избирается кандидат, называемый победителем по Симпсону, с наивысшей такой оценкой.

Оба эти правила состоятельны по Кондорсе. Победитель по Кондорсе один получает наивысшую оценку Копленда, а также оценку Симпсона выше половины общего числа избирателей.

Очевидно, что правила Борда, Копленда, Симпсона оптимальны по Парето, анонимны и нейтральны, если мы рассматриваем их как отображения, ставящие в соответствие каждому профилю предпочтений подмножество победителей. В случае требования избрать ровно 1 победителя голосования будут нарушены требования анонимности или нейтральности.

Для характеристики правила голосования введем еще одно нормативное свойство:

Монотонность (или положительная обратная связь).

Предположим, что a выбирается (среди победителей) при данном профиле предпочтений и профиль изменяется только так, что положение a улучшается, в то время как относительное сравнение пары любых других кандидатов для любого выборщика остается неизменным. Тогда кандидат a по-прежнему будет избран (будет среди победителей) для нового профиля.

Пример 4. Все правила подсчета очков, а также правила Копленда и Симпсона являются монотонными.

В качестве примера характеристики процедур голосования на основе введенного нормативного свойства монотонности рассмотрим два популярных правила голосования.

Определение 7. Правило относительного большинства с выбыванием

В 1 туре каждый избиратель подает 1 голос за 1 кандидата. Если кандидат набирает строгое большинство голосов, то он и избирается. В противном случае во 2 туре проводится голосование по правилу большинства с 2 кандидатами, набравшими наибольшее количество голосов в 1 туре.

Это правило относительного большинства с выбыванием широко используется во Франции, а также в демократической России. Однако оно не является монотонным, как показывают следующие 2 профиля с 17 избирателями:

Профиль А				Профиль Б			
6	5	4	2	6	5	4	2
a	c	b	b	a	c	b	a
b	a	c	a	b	a	c	b
c	b	a	c	c	b	a	c

При профиле А во второй тур проходят кандидаты a, b , где побеждает кандидат a (11 голосов – за, 6 голосов – против). Профиль Б такой же, как А, за одним исключением. У двух избирателей предпочтение $b > a > c$ меняется на предпочтение $a > b > c$, т. е. для них теперь a предпочтительнее b . Теперь во второй тур пройдут кандидаты a, c , причем выиграет кандидат c (9 голосов – за, 8 – против).

Таким образом, улучшение позиции кандидата a приводит к его поражению.

Определение 8. Метод последовательного сужения области выбора

Исключаем сначала тех кандидатов, кто получил наименьшее количество голосов. Затем посчитаем голоса для оставшихся кандидатов и опять исключим получивших наименьшее количество голосов. Будем повторять эту процедуру до тех пор, пока не останется 1 кандидат (или множество кандидатов с равным числом голосов).

Это правило также нарушает свойство монотонности для некоторых профилей. Для доказательств рассмотрим пример Фишберна с 27 избирателями и 3 кандидатами.

Избиратели	6	4	6	2	6	3
	a	b	b	c	c	a
	b	a	c	b	a	c
	c	c	a	a	b	b

Пусть мы производим первое исключение на основе вектора очков $s(0) = 0 < s(1) < s(2)$, и затем действует правило большинства. Сначала исключается с, т. к. очки

$$c = 8s(2) + 9s(1) < \min(9s(2) + 10s(1), 10s(2) + 8s(1)).$$

Затем кандидат b проиграет во 2 туре кандидату a.

Предположим, что 5 избирателей (3 из 4 с предпочтениями $b > a > c$ и 2 с предпочтениями $c > b > a$) поменяли в своих предпочтениях позиции a и b, т. е. улучшили позицию a. Получим профиль:

Избиратели	9	1	6	8	3
	a	b	b	c	a
	b	a	c	a	c
	c	c	a	b	b

Теперь в 1 туре будет исключен b, т. к. очки $b = 7s(2) + 9s(1) < \min(12s(2) + 9s(1), 8s(2) + 9s(1))$.

A во втором туре победит кандидат c (14 голосов – за, 13 – против).

Таким образом, усиление поддержки кандидата a привело к его поражению в улучшенном по отношению к этому кандидату профиле. Налицо нарушение аксиомы монотонности.

Заключение

Одним из возможных путей повышения эффективности преподавания математики студентам вузов (особенно гуманитарных специальностей) предлагается принять парадигму практико-ориентированной направленности содержания образования. Наглядное, научное, последовательное применение математического аппарата в знакомой студенту гуманитарной области ликвидирует разрыв, существующий между ожиданиями последнего, связанными с гуманитаризированным преподаванием предметов научно-технического блока, и существующим отвлеченным способом трансляции учебного материала. Высоким методическим потенциалом практико-ориентированного приобщения студента к математическому знанию обладает нормативная теория группового выбора. Предмет, метод и технология группового выбора доставляет яркий пример востребованности математического способа мышления в важной для специалиста практически любого профиля гуманитарной области – коллективного принятия решения. Кроме получения конкретных научных результатов, связанных с нормативной характеристикой различных процедур коллективного принятия решения, овладение содержанием теории расширяет горизонт мировоззрения студента, развивает его мышление, и на этой благоприятной основе формируется новое ценностное отношение к математическому знанию как желательному и востребованному в будущей профессиональной деятельности специалиста любого профиля.

Список использованной литературы:

1. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. – М.: Высшая школа, 1989.
2. Вольский В.И., Лезина З.М. Голосование в малых группах. – М.: Наука, 1991.
3. Borda J.C. Memoire sur les elections an scrutin / Histoire de l'academie des sciences pour 1781. – Paris. P. 657 et suiv.
4. Condorcet I.A. Essai sur l'application de l'analyse a la probabillite des de decisions rendues a la pluralite des voix. – Paris, 1785.
5. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. - М.: Мир, 1991.
6. Fishburn P.C. The theory of social choice. – Princeton: Princeton University Press, 1973.
7. Fishburn P.C. Monotonicity paradoxes in the theory of elections. Discrete Applied Mathematics. 1982. №4.