

ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО АРСС-МОДЕЛИ СИГНАЛА

В данной статье предложены подходы к оцениванию динамических характеристик электромеханических систем с использованием авторегрессионной модели сигнала со скользящим средним (АРСС-модели). Показаны практические результаты исследований.

Изложение подхода к установлению разностных схем, отражающих структурные свойства сигнала, и порождаемых ими методов измерения динамических характеристик (ДХ) электромеханических систем (ЭМС) целесообразно вести, постепенно увеличивая сложность: начать с режима свободных затухающих колебаний одномерной ЭМС, затем перейти к режиму вынужденных колебаний, двумерной ЭМС и т. д.

Дифференциальное уравнение, описывающее работу электромеханической системы, может быть приведено к виду

$$y'' + 2\alpha y' + \omega_0 y = 0. \quad (1)$$

Решением (1) являются (при $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$) периодические затухающие колебания

$$y(t) = A_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

апериодические затухающие колебания (при $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$)

$$y(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad (3)$$

критические затухающие колебания (при $\alpha^2 = \omega_0^2$)

$$y(t) = e^{-\alpha_3 t} (A_3 t + A_4), \quad (4)$$

где $A_0, \varphi_0, A_1, A_2, A_3, A_4$ – константы, определяемые начальными условиями [1].

Ориентируясь на цифровые методы измерений и обработки данных, поставим в соответствие процессу затухающих колебаний последовательность отсчетов $y_k = y(k \Delta t)$, где Δt – период дискретизации, $k = \overline{0, N}, N+1$ – объем выборки.

Так, для (2) будем иметь

$$y_k = A_0 e^{-\alpha k \Delta t} \cdot \sin(\omega k \Delta t + \varphi_0),$$

применив к которому z-преобразование (2), получим в области изображений

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_0 e^{-2k\Delta t} \cdot \sin(\omega k \Delta t + \varphi_0) \cdot z^{-k} = \frac{C_0 + C_1 z^{-1}}{1 - \lambda_1 z^{-1} + \lambda_2 z^{-2}}, \quad (5)$$

где $C_0 = A_0 \sin \varphi_0, C_1 = A_0 e^{-\alpha \Delta t} \cdot \sin(\omega \Delta t - \varphi_0)$,

$$\lambda_1 = \lambda_0 e^{-\alpha \Delta t}, \lambda_2 = e^{-2\alpha \Delta t}, \lambda_0 = 2 \cos \omega \Delta t. \quad (6)$$

Видим, что λ_j – коэффициенты, не зависящие от номера отсчета, определяемые только динамическими свойствами вибросигнала (зна-

чениями α и ω) и значением шага дискретизации $\Delta t, j = \overline{0, 2}$.

После умножения на знаменатель представим (5) в виде

$$Y(z) - \lambda_1 z^{-1} Y(z) + \lambda_2 z^{-2} Y(z) = C_0 + C_1 z^{-1},$$

применив обратное z-преобразование к которому, получим в области оригиналов авторегрессионную модель со скользящим средним (АРСС) или разностную схему (РС)

$$y_k = \lambda_1 y_{k-1} - \lambda_2 y_{k-2} + C_0 \delta_k + C_1 \delta_{k-1}, \quad (7)$$

где $y_k = 0$ при $k < 0, \delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$ – дискретный аналог дельта-функции.

Учтем, что при $k \geq 2$ в (7) $\delta_k = \delta_{k-1} = 0$, и в отсчетах y_k реально присутствует помеха: систематическая из-за неадекватности постулируемой модели сигнала, погрешностей измерительного тракта и (или) случайная, имеющая в общем случае аномальное распределение вероятностей значений. [3] Тогда более общей для квазидетерминированного сигнала будет АР-модель или РС второго порядка

$$y_k = \lambda_1 y_{k-1} - \lambda_2 y_{k-2} + \xi_k \quad (8)$$

где ξ_k – ордината аддитивной помехи, $k \geq 2$.

Выражение (8) описывает работу цифрового фильтра, преобразующего цветной шум отсчетов y_k . При адекватности принятой модели (2) реальному сигналу значение отсчета будет предсказано по значениям $y_{k-1}, y_{k-2}, \lambda_1, \lambda_2$ с ошибкой вида белого шума, а при наличии систематических погрешностей шум будет иметь некоторую окраску спектра.

Через коэффициенты λ_1, λ_2 в (6) определяются [4] параметр затухания

$$\alpha = \frac{1}{2\Delta t} \ln \frac{1}{\lambda_2} \quad (9)$$

и резонансная частота

$$\omega = \frac{1}{\Delta t} \cos \frac{\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_2}} \quad (10)$$

Из (6), (9), (10) очевидны необходимые условия $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ для принятия модели (7)

$$\frac{1}{4} \lambda_1^2 < \lambda_2 < 1. \quad (11)$$

Расчет λ_1 и λ_2 (с погрешностью при наличии помех) может быть произведен при дополнении (8) хотя бы одним уравнением, образующим систему алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} y_k = \lambda_1 y_{k-1} - \lambda_2 y_{k-2} + \xi_k \\ y_1 = \lambda_1 y_{1-1} - \lambda_2 y_{1-2} + \xi_k, \end{cases} \quad (12)$$

где $1 \neq k, 1 \geq 2$.

При $l = k+1$ будет минимальная длительность реализации в $13\Delta t$. Условие выбора Δt : $2 < \frac{T}{\Delta t} \leq 10 \div 12$, где $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Таким образом, возможна оценка α и ω на $\frac{1}{12} \div \frac{1}{2}$ части периода колебаний.

Для того чтобы обеспечить помехозащищенность измерений или, соответственно, снизить требования к точности единичного измерения, следует от рассмотренного определения неизвестных параметров по минимуму данных перейти к обработке избыточных измерений [4]: увеличить объем выборки и количество используемых РС вида (8), переопределить СЛАУ, обеспечить тем или иным путем регуляризацию ее решения, дать тем самым «сток» для помех. [2, 3]

Другим возможным приемом является увеличение для обеспечения возможности учета окраски шума, порядка РС, а затем уже обращение к регуляризации.

Возможны различные методы получения устойчивого решения переопределенной СЛАУ [3, 4]. В плане удовлетворения требований помехозащищенности и устойчивости оценок, существования метрологического обеспечения оправдало обращение к методу наименьших модулей, методу наименьших квадратов (МНК) и его модификациям [4].

МНК-оценки, хотя бы и в качестве первого приближения, привлекательны тем, что реализуют принятую при моделировании ЭМС энергетическую эквивалентность, традиционны в

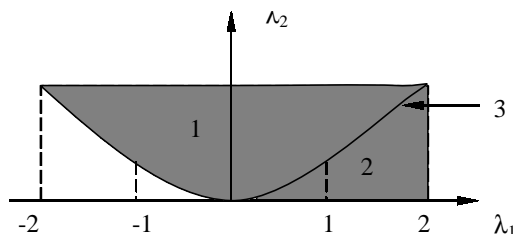


Рисунок 1. Плоскость значений коэффициентов РС для колебаний линейной одномерной ЭМС. 1 – область значений коэффициентов для затухающих периодических колебаний; 2 – для апериодических колебаний; 3 – для критических апериодических колебаний.

приложениях. Вместе с тем они не обладают свойством устойчивости, поэтому необходимо дополнить МНК специальными процедурами для его обеспечения.

Будем МНК-оценки $\hat{\lambda}_1^i, \hat{\lambda}_2^i$ получать при текущем сглаживании по выборке объемом L из общей выборки объемом $N+1$:

$$\{\hat{\lambda}_1^i, \hat{\lambda}_2^i\} = \arg \min_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{k=Y}^{L+Y-1} \{y_k - \lambda_1 y_{k-1} - \lambda_2 y_{k-2}\}^2, \quad (13)$$

где $v \geq 2, L+v-1 \leq N, i = 1, N-L, N-L-1$ – число получаемых текущих МНК-оценок.

Наиболее распространенный алгоритм выполнения условия (13) на каждом шаге текущего сглаживания (через один, два и т. д. отсчетов) – получение системы нормальных уравнений Юла – Уокера [2, 4].

Однако при этом соответствующие матрицы имеют обычно плохую обусловленность, особенно при рассматриваемых в дальнейшем случаях РС с числом неизвестных коэффициентов больше двух. Поэтому каким бы методом ни решались нормальные уравнения, ошибки во входной информации и ошибки округления, внесенные в процессе решения чрезмерно перемножаются в вычисляемых коэффициентах $\hat{\lambda}_1^i, \hat{\lambda}_2^i$ [4].

В качестве основного для числа неизвестных коэффициентов РС не более шести использован и дал хорошие результаты метод сингулярных разложений, избегающих большого числа обусловленности путем отбрасывания некоторых сингулярных чисел для обеспечения минимума суммы квадратов отклонений РС. Данный метод позволил решать СЛАУ с числом обусловленности до 10^{11} .

Через вычисляемые при разложении сингулярные числа и дисперсию помехи могут быть рассчитаны и дисперсии коэффициентов РС [4], значения которых вместе со значением минимизируемой суммы квадратов отклонений характеризуют точность измерений на отдельных тактах текущего сглаживания или, в качестве частного случая, при сглаживании по всей выборке.

Получаемые в ходе текущего сглаживания МНК-оценки $\hat{\lambda}_1^i, \hat{\lambda}_2^i$ целесообразно использовать, во-первых, для изучения возможного при линеаризации ЭМС тренда ДХ α и ω , отнесенных к v -ому отсчету ординат колебаний (v -ому значению огибающей), а во-вторых, для расчета статистически устойчивых коэффициентов РС, например, путем их линейной комбинации (L-оценки), комбинации их рангов в вариаци-

онном ряду и значений суммы квадратов отклонений на i -ом такте (R-оценки) и других процедур, допускающих настройку на заданную выборочную ситуацию [4].

Одной из наиболее простых, хорошо исследованных по своим статистическим свойствам процедур обеспечения робастности является нахождение медианных значений из i -ых оценок коэффициентов РС. Далее будут, как правило, использоваться оценки вида

$$\hat{\lambda}_j = \text{med}\{\hat{\lambda}_j^i\} = \hat{\lambda}_{j0,5}^i, \quad (14)$$

для которых легко рассчитываются через квантили множества i -ых оценок $\hat{\lambda}_j^i$ дисперсии и 95%-ые доверительные интервалы:

$$\hat{\lambda}_{0,95}[\hat{\lambda}_j] = \hat{\lambda}_j \pm \frac{2(\hat{\lambda}_{j0,75}^i - \hat{\lambda}_{j0,25}^i)}{\sqrt{N-L+1}}, \quad (15)$$

где $N-L+1 \Rightarrow 4 \div 5$ для обеспечения расчета соответствующих квантилей.

Изложенные здесь приемы обеспечения вычислительной и статистической устойчивости являются общими и для используемых в дальнейшем методов измерения ДХ через разностные схемы.

Итак, определив на первом этапе идентификацию для (8) λ_1 и λ_2 , а в соответствии с (9) λ_1 и (10) ω , представим ряд отсчетов для (2) в виде:

$$y_k = A_{01}e^{-\alpha k\Delta t} \sin \hat{\omega} k\Delta t + A_{02}e^{-\alpha k\Delta t} \cos \hat{\omega} k\Delta t, \quad (16)$$

где $A_{01} = A_0 \cos \hat{\phi}_0$, $A_{02} = A_0 \sin \hat{\phi}_0$.

Осуществляя среднеквадратическое приближение (16) на $\{A_{01}, A_{02}\}$, получим МНК-оценки

$$\{A_{01}, A_{02}\} = \arg \min_{A_{01}, A_{02}} \sum_{k=0}^N \{Y_k - A_{01}e^{-\alpha k\Delta t} \sin \hat{\omega} k\Delta t - A_{02}e^{-\alpha k\Delta t} \cos \hat{\omega} k\Delta t\}^2. \quad (17)$$

После определения A_{01} и A_{02} из (17) помехозащищенные оценки коэффициентов A_0 и ϕ_0 , зависящих от начальных значений (СС-параметров), будут равны

$$\hat{A}_0 = \sqrt{\hat{A}_{01}^2 + \hat{A}_{02}^2}, \quad \hat{\phi}_0 = \arctg \frac{\hat{A}_{02}}{\hat{A}_{01}}.$$

По вычисленным на втором этапе идентификации A_0 и ϕ_0 могут быть рассчитаны «подправленные» в среднеквадратическом смысле ординаты колебаний

$$\hat{y}_k = \hat{A}_0 e^{-\alpha k\Delta t} \sin(\hat{\omega} k\Delta t + \hat{\phi}_0). \quad (18)$$

В качестве интегральной характеристики точности, критерия неадекватности постулируемой модели, порядка РС принимается норми-

рованная сумма квадратов отклонений модельных значений от реальных, т. е. финальная ошибка прогноза. Для (2) с учетом (18) мера неадекватности имеет вид

$$E_H = \frac{\sum_{k=0}^n \{y_k - \hat{A}_0 e^{-\alpha k\Delta t} \sin(\hat{\omega} k\Delta t + \hat{\phi}_0)\}^2}{\sum_{k=0}^n Y_k^2}.$$

Ошибка прогноза больше 80-90% говорит об очень больших значениях дисперсии помехи или о неудовлетворительном выборе модели [4].

Следует рассмотреть и частный практически важный случай, когда детектором выделяется огибающая колебаний, а частота измеряется частотомером или используется аппаратная (программная) реализация преобразования Гильберта [3] для узкополосного аналитического сигнала

$$y(t) = A(t) \cos \omega(t), \quad (19)$$

каковым является сигнал (2).

Огибающая $A(t)$ и мгновенная частота $w(t)$ равны соответственно

$$A(t) = \sqrt{y^2(t) + y_r^2(t)} \quad (20)$$

$$\omega(t) = \frac{\dot{y}_r(t)y(t) - y_r(t)\dot{y}(t)}{\dot{y}(t) + y_r(t)}, \quad (21)$$

где
$$y_r(t) = -\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (22)$$

Для отсчетов огибающей сигнала (2) справедлива РС

$$A_k = \lambda_k A_{k-1} + \xi_k, \quad (23)$$

где $\lambda_1 = e^{-\alpha\Delta t}$, $|\lambda_1| < 1$.

Из (2) найдем $\hat{\lambda}_1$, обеспечивая экстремум функционала

$$\hat{\lambda}_1 = \text{med} \arg \min_{\lambda_1} M_{v,L} \{A_k - \lambda_1 A_{k-1}\}^2, \quad (24)$$

где $M_{v,L} \{ \} = \sum_{K=v}^{L+v-1} \{ \}$, $v \geq 1$, $L+v-1 \leq N$.

Начальное значение огибающей сигнала (2) определяет условие

$$\hat{A}_0 = \arg \min_{A_0} \sum_{K=0}^N (A_k - \hat{\lambda}_1^k A_0)^2.$$

Использованная процедура регуляризации с текущим среднеквадратическим приближением в определенной мере снимает проблему, связанную с переменной чувствительностью методов измерений, зависящей от Δt , номера отсчета k , значений y_k или A_k , приводя к наиболее устойчивому значению $\hat{\lambda}_j$ за время $(N+1)\Delta t$ выборки. Рассмотренная модель

сигнала (2) является одной из наиболее употребляемых для описания динамических явлений в ЭМС: при изучении демпфирующих свойств материалов и конструкций, в методе «ударных импульсов» для дефектации под-

шипников, когда в широкополосном вибросигнале появляются значительные по величине импульсы, при моделировании акустической эмиссии, в задачах динамики манипуляционных роботов.

Список использованной литературы:

1. Райхер В.Л. Модели рассеяния усталостной долговечности, использующие понятие индивидуальных кривых сопротивления усталости. // Расчет и управление надежностью больших механических систем. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. – С. 35-41.
2. Дач Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z – преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
3. Бабкин Н.В., Макшанов А.В., Мусаев А.А. Робастные методы статистического анализа навигационной информации / Под ред. И.В. Челпанова. – Л.: ЦНИИ «Румб», 1985. – 206 с.
4. Семенычев В.К. Оценка динамики механических систем по АР-СС модели сигнала // Вибродиагностика. – 1987. С. 111-115.