

## ОЦЕНКА МАТРИЦ КОРРЕСПОНДЕНЦИЙ В ВИДЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В проектировании транспортных систем матрицы корреспонденций являются одним из самых сложных и дорогостоящих видов информации. Поэтому во многих исследованиях рассматривалась модель восстановления матриц корреспонденций на основе обследований интенсивности движения транспорта. В данной статье рассматривается задача робастной оценки матрицы корреспонденций в случаях использования данных, содержащих ошибки.

В зарубежной теории и практике проектирования транспортных систем уже с 70-х годов уделялось большое внимание методам восстановления матриц корреспонденций с использованием только данных об интенсивности движения (Estimation of Origin-Destination Matrix from Traffic Counts). Методы оценки существующих матриц корреспонденций отнесены специалистами «Мировой дорожной ассоциации» (PIARC) к числу важнейших инструментов анализа улично-дорожных сетей (УДС). Например, в американском руководстве Highway Capacity Manual 2000 восстановлению матриц корреспонденций уделено большое внимание (Гл 29 «Corridor analysis») и изложен метод такой оценки применительно к магистральным дорогам. По данной тематике имеется обширнейшая библиография, которую невозможно представить в рамках отдельной статьи.

В нашей стране в первую очередь получила развитие теория расчетов пассажиропотоков, в том числе, были предложены методы оценки существующих матриц корреспонденций на маршрутном пассажирском транспорте [1]. Методам восстановления матриц корреспонденций в виде потоков транспортных было посвящено лишь несколько исследований [3, 4], что объяснялось относительно меньшим интересом к проблемам проектирования и реконструкции УДС. При этом российские исследования (НИПИ генерального плана Ленинграда, 1987-1988 гг., ЦИТИ, Москва, 1999-2002 гг.) основаны на опросе водителей.

Продолжающийся рост автомобильного парка и объемов движения в российских городах требует совершенствования инструментария проектирования и оценки УДС. Поэтому представляется интересным рассмотреть возможности решения рассматриваемой задачи применительно к российским условиям, учитывая, в первую очередь применяющиеся методы обследований интенсивности движения. Как правило, такие обследования проводятся в пиковые часы с подсчетом транспортных средств

разных типов на всех направлениях движения на каждом из обследуемых перекрестков. Поэтому формулируется задача регрессионной оценки матрицы корреспонденций для следующих условий:

- исходными данными являются замеры интенсивности движения на отдельных участках улично-дорожной сети, выполняемые в определенное время в будние дни (например, вечерний час пик 17.00-19.00);

- исходные данные об интенсивности движения содержат ошибки (рис. 3), вызванные проведением замеров в разные дни и ошибками самих подсчетов интенсивности движения.

Следует привести очень важную для понимания рассматриваемой задачи цитату из HCM 2000 [6]: «Количество элементов матрицы корреспонденций всегда превосходит количество сегментов сети. Цель оценивания состоит не в определении точной матрицы корреспонденций, а в нахождении такой, которая достаточно близка к ней и соответствует данным интенсивности движения.» (глава 29 «Corridor analysis» с. 29-30). Необходимо пояснить, что под сегментами в оригинальном тексте понимаются дуги графа, которыми представлено описание сети.

В отличие от HCM 2000 рассматривается не «транспортный коридор», а участок УДС. С целью использования распределения потоков по принципу «все или ничего» (all or nothing) УДС разделяется на отдельные «маршруты», или (как в HCM 2000) «направления движения» (рис. 1-2). Матрицы описывающая принадлежность корреспонденций дугам графа будут состоять из 1 и 0 (наличие или отсутствие данной корреспонденции).

Отдельно рассматриваемое направление движения (маршрут) представляется в виде графа (рис. 1 и 2 б), для которого определяется своя матрица корреспонденций. Соответственно начальными и конечными пунктам корреспонденций являются поворотные потоки на перекрестках, т.е. входящие потоки на улицу или выходящие с нее (см. и рис. 1). Вместо центроидов

расчетных транспортных районов используют вершины сети (см. рис. 2), образующиеся на границах рассматриваемого участка УДС, в которых начинаются и оканчиваются корреспонденции (истоки-стоки).

Сформулированная задача регрессионного оценивания корреспонденций предполагает использование статистических процедур устойчивых к выбросам (т.е. грубым ошибкам данных). Один из приемов робастной оценки параметров регрессии  $\theta$  состоит в использовании вместо суммы квадратов отклонений регрессии  $\sum_{i=1}^n e_i^2$  минимизации целевой функции

$$\sum_{i=1}^n |e_i|^v = \sum_{i=1}^n |y_i - \theta|^v, \quad (1)$$

где  $v$  – показатель степени, значения которого принимают в диапазоне  $1 \leq v < 2$ .

Оценки (1) предложено называть  $L_v$  оценками [3]. Устойчивость такой аппроксимации по сравнению с методом наименьших квадратов вызвана тем, что большие отклонения  $(y_i - \theta)$  меньше влияют на целевую функцию. Поэтому показатель степени  $v$  интерпретируется некоторыми авторами как фильтр выбросов [3].

Частным случаем ( $v = 1$ ) оценки (1) является минимизация суммы абсолютных модулей отклонений, т.е. метод наименьших модулей (МНМ)

$$\sum_{i=1}^n |e_i| = \sum_{i=1}^n \left| y_i - \sum_{j=1}^m a_j x_{ij} \right|. \quad (2)$$

Аппроксимацию (2) можно рассматривать как задачу линейного программирования с минимизацией целевой функции в виде взвешенной суммы модулей ошибок  $e_i$  [5]

$$\sum_{i=1}^m w_i (g_i + h_i), \quad (3)$$

где  $g_i = \max |0, e_i|$ ,  $h_i = \min |-e_i, 0|$ ;  $w_i$  – весовые коэффициенты, при ограничениях (в случае простого МНМ весовые коэффициенты  $w_i$  принимаются равными 1).

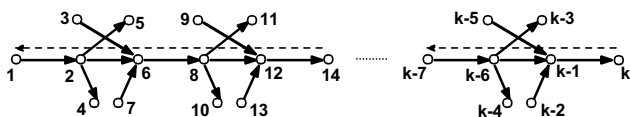
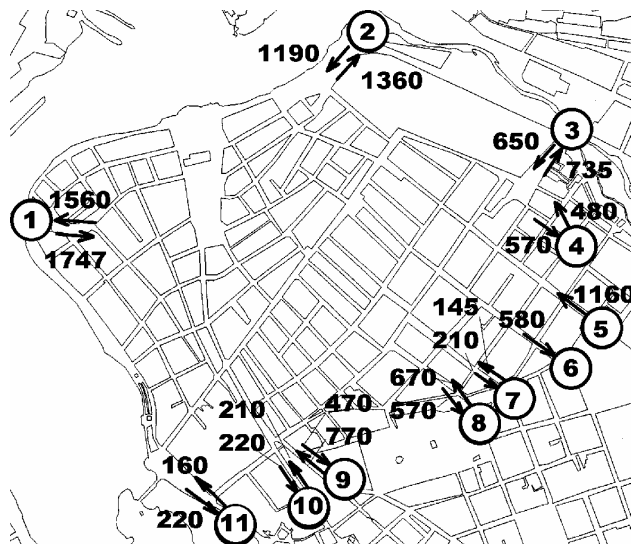
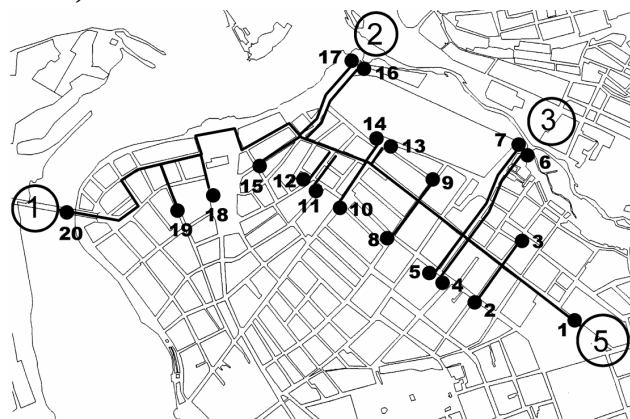


Рисунок 1. Представление маршрута движения в виде ориентированного графа для определения матрицы корреспонденций:

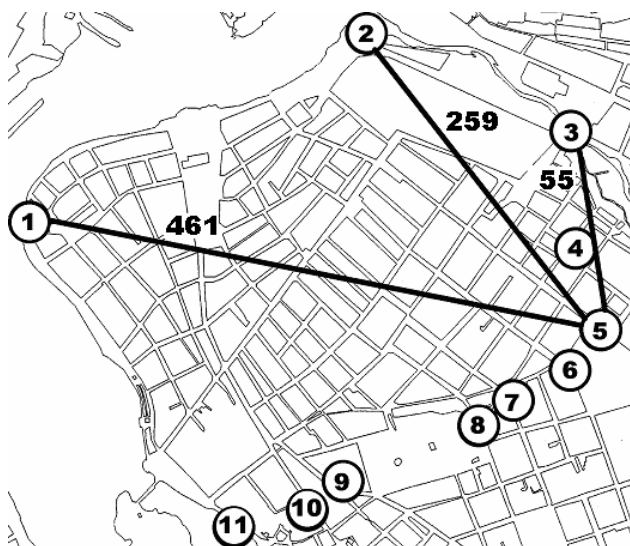
1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, ..., k-5, k-4, k-3, k-2, k – вершины графа, в которых возникают и заканчиваются корреспонденции (истоки-стоки или O-D pairs)



а)



б)



в)

Рисунок 2. Определение матрицы корреспонденций транзитных потоков в центральной части Иркутска: а – вершины матрицы корреспонденций (истоки-стоки) транзитных потоков и интенсивности движения в вечерний час пик, физ.ед./ч; б – граф для оценки матрицы корреспонденций из вершины 1 в вершины 1, 2, 3, ..., 20, используемой для оценки транзитных потоков из вершины 5 в вершины 1, 2, 3; в – результат оценки транзитных потоков из вершины 5 в вершины 1, 2, 3;

Ограничения задачи (3):  $Ax + g - h = y$ ;  
 $w \geq 0, g \geq 0, h \geq 0$ .

При определении вектора корреспонденций  $x$  (вектор-столбец размерности  $m \times 1$ ), решается задача линейного программирования для нового вектора переменных  $x_2$  размерности  $(m + 2n) \times 1$ . В целевую функцию (3), которой является сумма модулей ошибок, входит лишь часть вектора переменных  $x_2$ . Матрица коэффициентов  $A$  размера  $n \times m$  преобразуется в матрицу  $A_2$  размером  $n \times (m + 2n)$ , т.е. дополняется двумя диагональными матрицами  $d_1$  и  $d_2$ .

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

Вектор ошибок  $e^k$  определяется учетом результатов оценки вектора корреспонденций  $x^{k-1}$  на предыдущей итерации. В зависимости от знака ошибки  $e_i$  задаются элементы вектора  $x_2$ , начиная с индекса  $m+1$ . Таким образом, задача (3) формулируется в следующем виде

$$\min \sum_{i=m+1}^{m+2n} w_i x_i, \quad (4)$$

при условии  $A_2 x_2 = y; x \geq 0$ .

При проведении первой итерации для определения весовых коэффициентов  $w_i$  необходим оцененный каким-либо методом вектор  $x_0$ , при этом допускаются даже экспертные оценки [2]. Применительно к рассматриваемой задаче такой начальной оценкой  $x_0$  могут быть старая матрица, матрица, полученная в результате предварительного расчета, в самом крайнем случае – экспертная оценка. Начальные значения корреспонденций  $x_{ij}^0$  определялись автором с использованием простой гравитационной модели

$$x_{ij}^0 = a_i b_j A_i B_j, \quad (5)$$

где  $x_{ij}$  – количество транспортных средств, следующих из вершины  $i$  в вершину  $j$ ;  $a_i$  – интенсивность движения из  $i$ ;  $b_j$  – интенсивность движения в  $j$ ;  $A_i, B_j$  – коэффициенты балансировки по столбцам и строкам матрицы.

Минимизация целевой функции (4), рассматривается задача линейного программирования со смешанными ограничениями

$$\min w^T x, \quad (6)$$

при линейных ограничениях, в которых матрица  $A_2$  получается на основе матрицы инцидентности  $A$

$$A_2 x_2 = y; \quad (7)$$

и двухсторонних ограничениях

$$x^{lb} \leq x \leq x^{ub}. \quad (8)$$

Исходные данные включают:

$A$  – матрицу инцидентности ранга  $n \times m$ , задает принадлежность корреспонденций дугам графа сети, ее элементы  $a_{ij}$  имеют значение 0 или 1. если корреспонденция  $j$  проходит по дуге  $i$ , то  $a_{ij} = 1$ , в противном случае  $a_{ij} = 0$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  – количество дуг графа УДС, на которых задана интенсивность движения,  $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $m$  – количество корреспонденций.

$y$  – вектор-столбец значений интенсивности движения на дугах сети;

$x_0$  – начальное приближение значений корреспонденций – исходный вектор-столбец значений, который может быть задан: в виде старой матрицы корреспонденций, преобразованной в вектор; значениями корреспонденций, полученными в результате экспертной оценки; в виде оценки матрицы корреспонденций, полученной с использованием гравитационной модели;

$lb$  – коэффициент, задающий нижние допустимые значения корреспонденций  $x^{lb} = x \cdot lb$ ;

$ub$  – коэффициент, задающий верхние допустимые значения корреспонденций  $x^{ub} = x \cdot ub$ ;

$div$  – коэффициент, задающий верхние допустимые значения искусственных переменных  $x^{ub}_i = x_i / div$ ;

$v$  – показатель степени весовых коэффициентов  $w_i = |e_i|^{v-2}$ .

В результате решения получаем векторы-столбцы:

$x$  – восстановленные значения корреспонденций;

$y$  – теоретические значения интенсивности движения на дугах, рассчитанные на основе восстановленных корреспонденций  $y = Ax$ ;

$e$  – остатки (ошибки) регрессии – разность между наблюдаемыми и рассчитанными значениями интенсивности движения на дугах  $e = y - Ax$ .

Оценка точности регрессии основана на парном сравнении замеренных  $y_i$  и оцененных  $\hat{y}_i$  значений потоков на дугах (т.е. анализ остатков регрессии  $e = y - A^*x$ ) и использовании статистик:

– критерий Стьюдента для парного сравнения исходных и оцененных значений потоков;

– средняя абсолютная разность пар замеренных и оцененных значений потоков  $\bar{e}_{abs} = \sum_i |e_i| / n$ ;

– отношение средней абсолютной ошибки к среднему значению интенсивности движения  $E = \bar{e}_{abs} / \bar{y}$ .

Для предварительной оценки качества исходных данных и наличия в них грубых ошибок (рис. 3а): предлагается рассматривать УДС в следующем виде (рис. 3б):

– входящие на перегон  $F(in)_i$  и выходящие  $F(out)_i$  с перегона потоки образуют пары;

– для оценки статистической однородности выборок значений интенсивности движения и выявления выбросов используются значения разностей пар

$$d_i = V(out)_i - V(in)_i. \quad (9)$$

Оценка качества данных интенсивности движения сводится к проверке гипотезы, что связанные выборки  $V(out)_i$  и  $V(in)_i$  принадлежат к одной генеральной совокупности, для их сравнения используется критерий Стьюдента для разностей пар. Кроме проверки близости выборок используются следующие критерии:

– средняя абсолютная ошибка

$$\bar{d}_{abs} = \sum_i |d_i| / n, \quad (10)$$

– отношение средней абсолютной ошибки к среднему значению интенсивности движения на перегоне в одном направлении

$$E = \bar{d}_{abs} / \bar{V}. \quad (11)$$

Для выявления грубых ошибок исходных данных следует использовать нормированное отклонение  $\hat{z} = (d_i - \bar{d}) / S_d$ , рассчитываемое для разностей пар входящих и выходящих потоков  $d_i = V(out)_i - V(in)_i$ .

В соответствии с имевшимися данными (материалы обследований: С. Петербург 1977-1978 г.г., 1985-1988 г.г.; Иркутск 1995 г., центральная часть Иркутска 1998 г.) максимальные абсолютные значения ошибок достигают 450-470 авт./ч. (в одном направлении). Диапазон значений средней абсолютной ошибки составил  $\bar{d}_{abs} = 53,8 - 190,6$ , а значений отношения  $\bar{d}_{abs} / \bar{V}$  имеет разброс от 0,082 до 0,391. Средняя абсолютная ошибка составила 115,3 авт./ч., при этом средняя абсолютная ошибка составляет в среднем 19% интенсивности движения. Анализ ошибок обследований интенсивности движения позволило сформулировать требования к точности восстановления матриц корреспонденций. Приемлемая точность восстановления корреспонденций  $\pm 20 \dots \pm 30$  авт./ч, которую можно использовать в качестве допустимой невязки итераций.

По результатам тестирования с применением искусственных данных без ошибок, искусственных загрязненных данных (максимальные ошибки  $\pm 350$  авт/ч) и реальных данных простой МНМ (все весовые коэффициенты  $w_i = 1$ ) имеет более высокую скорость схождения по сравнению с взвешенным МНМ. Анализ ошибок оценки корреспонденций и потоков, невязок оценок корреспонденций по итерациям показал, что необходимая для практических задач точность обеспечивается на 2-ой итерации. Установлено, что наибольший эффект на качество восстановления корреспонденций и значений потоков оказывают двухсторонние ограничения (8) корреспонденций  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) и искусственных переменных  $x_i$  ( $i = m+1, m+2, \dots, m+2n$ ). В соответствии с результатами тестирования рекомендуются следующие значения ограничений:

– нижние ограничения оцениваемых переменных  $x_i^{lb} = kx_i$ ,  $k=0$ ;

– верхние ограничения оцениваемых переменных  $x_i^{ub} = kx_i$ ,  $k \geq 2$ ;

– нижние ограничения искусственных переменных  $x_i^{lb} = 0$ ,  $i = m+1, m+2, \dots, m+2n$ ;

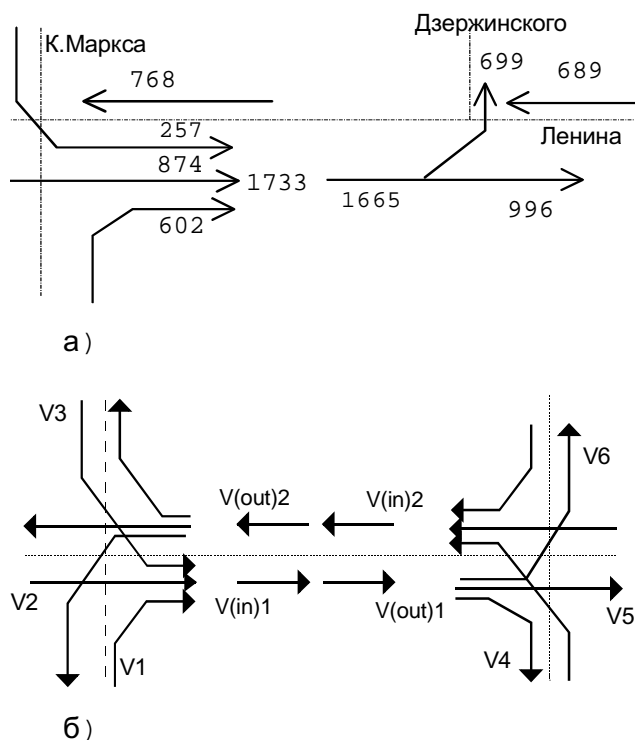


Рисунок 3. Возникновение ошибки при проведении обследований интенсивности движения (а) и представление перегона улицы в модели оценки ошибок подсчетов интенсивности движения (б)

– верхние ограничения искусственных переменных  $x_{m+j}^{ub} = (1/\text{div}) x_j$  и  $x_{m+n+j}^{ub} = (x_j/\text{div})$  рассчитывать для  $\text{div} \geq 30$ , где  $x_j$  – модуль остатка регрессии  $e_j$ , полученный на предыдущей итерации,  $n$  – количество дуг графа УДС, на которых заданы значения интенсивности движения;  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Восстановление матриц корреспонденций можно выполнять с использованием функций:

LP библиотеки Optimization Toolbox 2.0 версий пакета MATLAB 5.1 и 5.2;

LINPROG библиотеки Optimization Toolbox 2.2 версии пакета MATLAB 6.1

Выбор пакета MATLAB для решения задачи восстановления матриц корреспонденций обусловлен тем, что пакет ориентирован на выполнение операций с векторами и матрицами, в том числе разряженными матрицами.

Предложенный метод полностью основан на применении стандартных математических библиотек, поэтому прост и доступен для использования. Предполагается изучить возможности применения метода робастного восстановления корреспонденций для случаев пассажирских потоков (т. е. межостановочных матриц корреспонденций).

В завершение следует отметить, что опубликованное в августе 2003 решение задачи восстановления матриц корреспонденций в информационных сетях [7] также использует в качестве начальной итерации гравитационную модель, но следующей итерации рассматривается задача томографии, решаемая методами квадратичного программирования – т. е. применяется взвешенный метод наименьших квадратов.