

ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЯ КОМПЛЕКСНОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПРИ РАСЧЕТАХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

В работе развивается метод расчета магнитного поля с использованием комплексной магнитной проницаемости, позволяющий определить магнитную индукцию для двух моментов времени, сдвинутых на четверть периода. Возможно, выполнив расчет магнитного поля для одного положения ротора, получить информацию о поле в любой момент времени и определить параметры электрической машины. Рассматривается решение МКР уравнения Пуассона с учетом насыщения материала.

Электрическая машина является нелинейной электромагнитной системой, содержащей в общем случае N контуров с токами обмоток статора и M контуров с токами обмоток ротора и выполненной из материалов с нелинейными свойствами. В такой постановке задача моделирования электро-механического преобразования энергии может быть решена только численно.

Предлагается осуществить совместное решение уравнений, описывающих состояние магнитного поля, с комплексными уравнениями, удовлетворяющими законам Кирхгофа для контуров обмоток электрической машины. Для этого пренебрежем влиянием высших гармонических составляющих токов и при моделировании будем использовать понятие эквивалентной синусоиды тока [1]. Такое допущение для большинства электрических машин является корректным, так как при синусоидальном напряжении питания обмоток их потокосцепления можно считать гармоническими функциями [2]. Действующее же значение эквивалентной синусоиды тока по определению равно действующему значению реального тока. Это обеспечивает выполнение закона сохранения энергии и позволяет использовать при расчетах символический метод представления гармонических временных функций.

С физической точки зрения пренебрежение высшими гармоническими составляющими токов обмоток эквивалентно допущению, что перемагничивание магнитного материала происходит не по петле гистерезиса, а по эллипсу, имеющему равную петле площадь в координатах B и H (рисунок 1). Функции $H = H_m \cdot \sin \omega t$ и $B = B_m \cdot \sin(\omega t - \gamma)$ являются параметрическими уравнениями эллипса. Эллиптическая петля может быть охарактеризована тремя видами магнитной проницаемости [3]. «Упругая» проницаемость характеризуется значением магнитной индукции B в момент времени $t = T/4$, когда мгновенное значение напряженности магнитного поля достигает максимума:

$$\mu_A = \frac{B_m \cdot \sin(\frac{\omega T}{4} - \gamma)}{H_m} = \frac{B_m}{H_m} \cdot \cos \gamma = \frac{B_A}{H_m}$$

«Вязкая» проницаемость характеризуется значением магнитной индукции B_R в момент времени $t = 0$, когда H проходит через нуль:

$$\mu_R = \frac{B_m}{H_m} \cdot \sin \gamma = \frac{B_R}{H_m}$$

Полная магнитная проницаемость

$$\mu = \sqrt{\mu_A^2 + \mu_R^2}$$

Используя комплексный метод, гармонические функции B и H можно представить в виде вращающихся векторов, каждый из которых на своей временной комплексной плоскости образует круговое поле. Комплексная магнитная проницаемость

$$\underline{\mu} = \frac{\dot{B}_m e^{j(\omega t - \gamma)}}{H_m e^{j\omega t}} = \mu e^{-j\gamma} = \mu_A - j \cdot \mu_R$$

не зависит от времени. Ее можно рассматривать как комплексный коэффициент, изменяющий масштаб

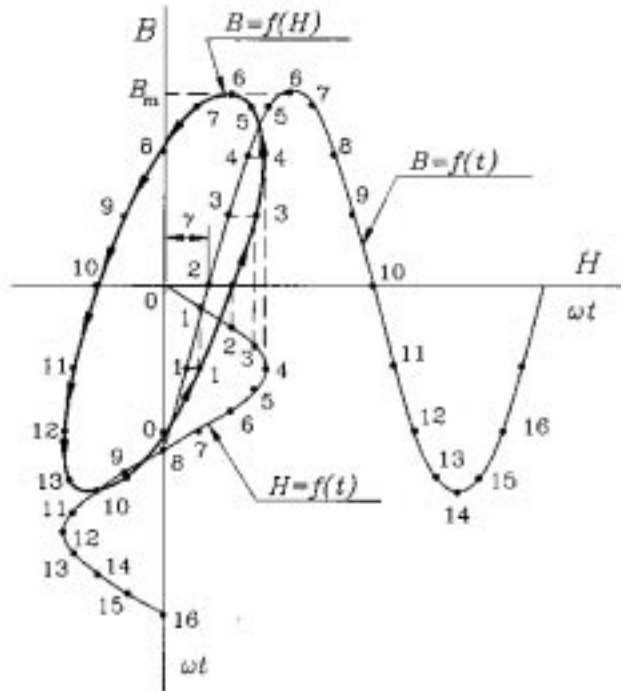


Рисунок 1. Зависимость $B=f(H)$ в случае пренебрежения влиянием высших временных гармоник тока намагничивания

временных осей при переносе вектора \dot{B}_m в плоскость вектора \dot{H}_m (или наоборот).

При переносе вектора \dot{B}_m в комплексную временную плоскость вектора \dot{H}_m получим два вектора магнитной индукции \dot{B}_A и \dot{B}_R :

$$\begin{aligned}\dot{B}_m &= \underline{\mu} \cdot \dot{H}_m = (\mu_A - j \cdot \mu_R) \cdot \dot{H}_m = \\ &= \mu_A \cdot \dot{H}_m - j \cdot \mu_R \cdot \dot{H}_m = \dot{B}_A - j \cdot \dot{B}_R.\end{aligned}$$

Согласно определению составляющих комплексной магнитной проницаемости μ_A и μ_R значения векторов \dot{B}_A и \dot{B}_R характеризуют значение вектора магнитной индукции \dot{B}_m в два сдвинутых на четверть периода момента времени. Это позволяет для эллиптической зависимости $B(H)$ получить информацию о состоянии магнитного поля в любой момент времени. Так, для положения векторов, изображенного на рисунке 2, на основании теории вращающихся полей можно записать

$$\begin{cases} \dot{B}_R = \dot{B}_1 + \dot{B}_2 \\ \dot{B}_A = j \cdot \dot{B}_1 + j \cdot \dot{B}_2 \end{cases}, \quad (1)$$

где \dot{B}_1 и $j \cdot \dot{B}_1$ – соответственно значения векторов магнитной индукции прямой последовательности в моменты времени $t = 0$ и $t = T/4$; \dot{B}_2 и $j \cdot \dot{B}_2$ – соответственно значения векторов магнитной индукции обратной последовательности в моменты времени $t = 0$ и $t = T/4$.

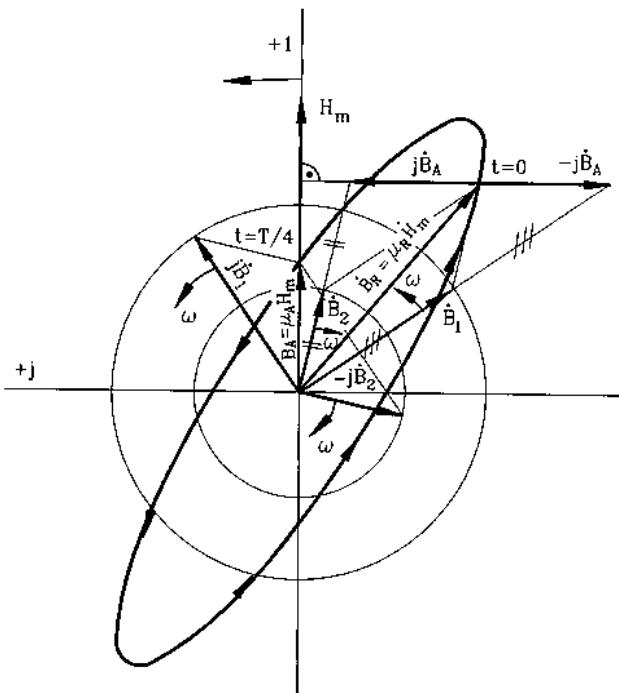


Рисунок 2. К определению временных составляющих векторов магнитной индукции прямой и обратной последовательности

Решая систему (1) относительно векторов магнитной индукции прямой и обратной последовательности, получим

$$\begin{cases} \dot{B}_1 = 0,5 \cdot (\dot{B}_R - j \cdot \dot{B}_A) \\ \dot{B}_2 = 0,5 \cdot (\dot{B}_R + j \cdot \dot{B}_A) \end{cases}. \quad (2)$$

В общем случае значение вектора магнитной индукции в произвольный момент времени определяется выражением

$$\dot{B}_m = \dot{B}_1 \cdot e^{j\omega t} + \dot{B}_2 \cdot e^{-j\omega t}. \quad (3)$$

Отмеченная особенность использования понятия комплексной магнитной проницаемости позволяет для расчета магнитного поля эффективно применить уравнение Пуассона. Для этого пространственный вектор потенциальной функции магнитного поля \dot{A} представляется в виде тензора

$$\dot{A} = \bar{A}_A + j \cdot \bar{A}_R,$$

в котором вещественная составляющая \bar{A}_A определит значение потенциальной функции в момент времени $t = T/4$, мнимая \bar{A}_R – в момент времени $t = 0$. Такое представление потенциальной функции позволяет рассматривать только стационарное состояние магнитного поля и дает возможность, используя выражения (1) – (3), определить характеристики магнитного поля в любой момент времени.

Задача сводится к установлению связи потенциальной функции магнитного поля \dot{A} с напряжением питания обмоток электрической машины. В силу конструктивных особенностей электрических машин для решения уравнения Пуассона целесообразно использовать метод конечных разностей, выбрав цилиндрическую систему координат (r, α, z) , для которой уравнение Пуассона имеет вид [2]:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{A}}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\underline{\mu} \cdot r} \frac{\partial \dot{A}}{\partial \alpha} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\underline{\mu}} \frac{\partial \dot{A}}{\partial z} \right) = -\dot{\delta},$$

где $\dot{\delta}$ – результирующий вектор плотности тока. При допущении о плоскопараллельности магнитного поля двигателя уравнение Пуассона имеет следующий вид:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{A}}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\underline{\mu} \cdot r} \frac{\partial \dot{A}}{\partial \alpha} \right) \right] = -\dot{\delta}. \quad (4)$$

На расчетную область в плоскости $r\alpha$ наносится полярная сетка. Размеры ячеек сетки выбираются таким образом, чтобы изменение потенциальной функции между соседними узлами происходило по линейному закону. Это допущение соответствует постоянству магнитных свойств среды в пределах ячейки расчетной области.

Рассмотрим произвольный (i, k) узел сетки (рисунк 3). Вокруг (i, k) узла выделяем площадку, ограниченную контуром 0-2-4-6-0. Для удобства вычисления размеров контура точки 0, 2, 4, 6 располагаются в центре средних линий ячеек сетки. Воспользуемся законом полного тока в интегральной форме. При интегрировании будем пренебрегать составляющей вектора плотности тока $\vec{\delta}$, обусловленной электрической проводимостью среды. В дальнейшем при переходе к конечно-разностным уравнениям ее влияние на потенциальную функцию будет учтено использованием комплексной магнитной проницаемости. Проводя интегрирование по контуру 0-2-4-6-0, получим

$$\oint_{0-2-4-6-0} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_p \vec{\delta} \cdot d\vec{p},$$

где p – площадь контура интегрирования 0-2-4-6-0;

$$\begin{aligned} \oint_{0-2-4-6-0} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_0^2 \vec{H} \cdot d\vec{r} + \int_2^4 \vec{H} \cdot d\vec{\alpha} + \int_4^6 \vec{H} \cdot d\vec{r} + \int_6^0 \vec{H} \cdot d\vec{\alpha} = \\ &= \int_0^2 \frac{\vec{B}_r}{\mu} \cdot d\vec{r} + \int_2^4 \frac{\vec{B}_\alpha}{\mu} \cdot r \cdot d\vec{\alpha} + \int_4^6 \frac{\vec{B}_r}{\mu} \cdot d\vec{r} + \int_6^0 \frac{\vec{B}_\alpha}{\mu} \cdot r \cdot d\vec{\alpha} = \\ &= \int_0^2 \frac{\vec{B}_r}{\mu} \cdot d\vec{r} + \int_2^4 \frac{\vec{B}_\alpha}{\mu} \cdot r \cdot d\vec{\alpha} + \int_4^6 \frac{\vec{B}_r}{\mu} \cdot d\vec{r} + \int_6^0 \frac{\vec{B}_\alpha}{\mu} \cdot r \cdot d\vec{\alpha} \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно [2] проекция тензора магнитной индукции \vec{B} на направление вектора $d\vec{r}$ (радиальная составляющая магнитной индукции)

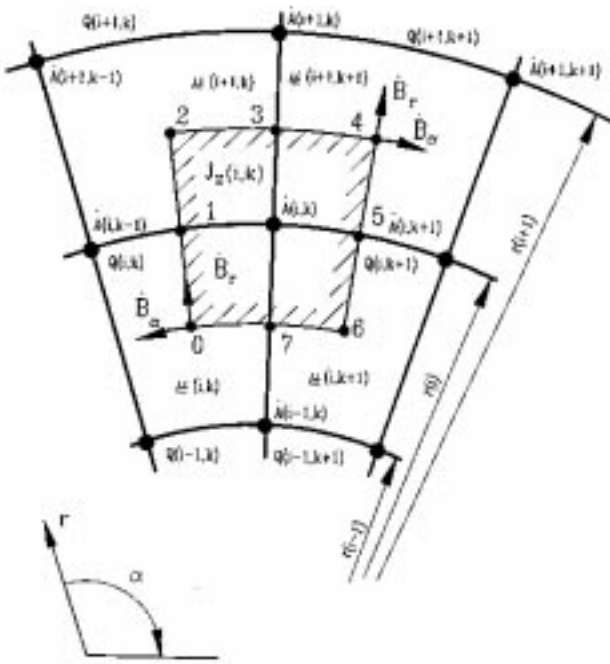


Рисунок 3. Схема (i, k) узла сетки расчетной области

$$\vec{B}_r = \text{rot}_r \vec{A} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{A}_\alpha}{\partial \alpha}$$

Проекция тензора магнитной индукции \vec{B} на направление вектора $d\vec{\alpha}$ (тангенциальная составляющая магнитной индукции)

$$\vec{B}_\alpha = \text{rot}_\alpha \vec{A} = -\frac{\partial \dot{A}_r}{\partial r}$$

Перейдем от производных в полученных выражениях к уравнениям в конечных разностях:

$$\dot{B}_r(i, k) = \frac{\dot{A}(i, k) - \dot{A}(i, k-1)}{Q(i, k)}; \quad (6)$$

$$\dot{B}_\alpha(i, k) = \frac{\dot{A}(i, k) - \dot{A}(i-1, k)}{\Delta r(i)}; \quad (7)$$

$$\int_0^2 \frac{\dot{B}_r}{\mu} \cdot dr = \frac{\dot{A}(i, k) - \dot{A}(i, k-1)}{Q(i, k)} \cdot \left[\frac{\Delta r(i)}{2 \cdot \mu(i, k)} + \frac{\Delta r(i+1)}{2 \cdot \mu(i+1, k)} \right];$$

$$\int_2^4 \frac{\dot{B}_\alpha}{\mu} \cdot r \cdot d\alpha = \frac{\dot{A}(i, k) - \dot{A}(i+1, k)}{\Delta r(i+1)}$$

$$\cdot \left[\frac{Q(i, k) + Q(i+1, k)}{4 \cdot \mu(i+1, k)} + \frac{Q(i+1, k+1) + Q(i, k+1)}{4 \cdot \mu(i+1, k+1)} \right];$$

$$\int_4^6 \frac{\dot{B}_r}{\mu} \cdot dr = \frac{\dot{A}(i, k) - \dot{A}(i, k+1)}{Q(i, k+1)}$$

$$\cdot \left[\frac{\Delta r(i+1)}{2 \cdot \mu(i+1, k+1)} + \frac{\Delta r(i)}{2 \cdot \mu(i, k+1)} \right];$$

$$\int_6^0 \frac{\dot{B}_\alpha}{\mu} \cdot r \cdot d\alpha = \frac{\dot{A}(i, k) - \dot{A}(i-1, k)}{\Delta r(i)}$$

$$\cdot \left[\frac{Q(i-1, k+1) + Q(i, k+1)}{4 \cdot \mu(i, k+1)} + \frac{Q(i-1, k) + Q(i, k)}{4 \cdot \mu(i, k)} \right].$$

Введем обозначения:

$$\underline{C}_r(i, k) = \frac{0,5}{Q(i, k)} \cdot \left[\frac{\Delta r(i)}{\mu(i, k)} + \frac{\Delta r(i+1)}{\mu(i+1, k)} \right];$$

$$\underline{C}_\alpha(i+1, k) = \frac{0,25}{\Delta r(i+1)}$$

$$\cdot \left[\frac{Q(i, k) + Q(i+1, k)}{\mu(i+1, k)} + \frac{Q(i+1, k+1) + Q(i, k+1)}{\mu(i+1, k+1)} \right];$$

$$\underline{C}_r(i+1, k+1) = \frac{0,5}{Q(i, k+1)} \cdot \left[\frac{\Delta r(i+1)}{\mu(i+1, k+1)} + \frac{\Delta r(i)}{\mu(i, k+1)} \right];$$

$$\underline{C}_{\alpha}(i, k+1) = \frac{0,25}{\Delta r(i)} \cdot \left[\frac{Q(i-1, k+1) + Q(i+1, k)}{\underline{\mu}(i, k+1)} + \frac{Q(i-1, k) + Q(i, k)}{\underline{\mu}(i, k)} \right]$$

– комплексные коэффициенты, характеризующие магнитные свойства и размеры ячеек расчетной области;

$\dot{J}_z(i, k) = \int \dot{\delta} \cdot \partial \bar{p}$ – значение комплекса тока, охваченного контуром интегрирования 0-2-4-6-0, относительно (i, k) узла.

После замены интегралов в выражении (5) и приведения подобных членов получим следующее конечно-разностное уравнение для расчета значения потенциальной функции (i, k) узла расчетной области.

$$\dot{A}(i, k) = \frac{\dot{A}(i, k-1) \cdot \underline{C}_r(i, k) + \dot{A}(i+1, k) \cdot \underline{C}_{\alpha}(i+1, k) + \dot{A}(i, k+1) \cdot \underline{C}_r(i+1, k+1) + \dot{A}(i-1, k) \cdot \underline{C}_{\alpha}(i, k+1) + \dot{J}_z(i, k)}{\underline{C}_r(i, k) + \underline{C}_{\alpha}(i+1, k) + \underline{C}_r(i+1, k+1) + \underline{C}_{\alpha}(i, k+1)}. \quad (8)$$

Выражение (8) по форме записи не отличается от известных конечно-разностных уравнений для стационарных плоскопараллельных магнитных полей. Однако в данном случае физический смысл уравнения шире, так как на основании выражений (2, 3, 6, 7) уравнение (8) позволяет получить информацию о состоянии магнитного поля в любой момент времени.

Уравнения, аналогичные уравнению (8), могут быть составлены для всех узлов сетки расчетной области и образуют систему, решение которой позволяет получить распределение потенциальной

функции магнитного поля по расчетной области и все интегральные характеристики электрической машины.

Для учета влияния насыщения магнитной цепи, а также учета потерь в стали, в ходе решения систем уравнения вида (8) требуется корректировать значение магнитной проницаемости в ячейках сетки расчетной области. Корректировку проводят согласно кривым намагничивания используемых магнитных материалов в зависимости от получаемого в ячейке значения магнитной индукции.

Значение магнитной индукции в ячейке можно определить, учитывая, что радиальная \dot{B}_r и тангенциальная \dot{B}_{α} составляющие магнитной индукции в ячейке расчетной области (рисунок 3) представляют собой два ортогональных в пространстве временных вектора. То есть

$$\dot{B}_r = B_{rA} + j \cdot B_{rR}; \quad \dot{B}_{\alpha} = B_{\alpha A} + j \cdot B_{\alpha R},$$

где B_{rA} и $B_{\alpha A}$ – соответственно радиальная и тангенциальная составляющие пространственно-временного вектора магнитной индукции в момент времени $t=T/4$;

B_{rR} и $B_{\alpha R}$ – радиальная и тангенциальная составляющие вектора магнитной индукции в момент времени $t=0$.

Тогда модуль пространственного вектора магнитной индукции

$$\dot{B} = \sqrt{B_{rA}^2 + B_{\alpha A}^2} - j \cdot \sqrt{B_{rR}^2 + B_{\alpha R}^2} = B_A - j \cdot B_R.$$

С учетом выражений (2) и (3) значение магнитной индукции в ячейке расчетной области

$$B_m = \sqrt{B_{rA}^2 + B_{\alpha A}^2 + B_{rR}^2 + B_{\alpha R}^2}. \quad (9)$$

Таким образом, становится возможным, выполнив численный расчет магнитного поля для одного положения ротора, получить информацию о магнитном поле для любого момента времени и выполнить расчет параметров и характеристик электрической машины.

Список использованной литературы:

1. Иванов-Смоленский А.В. Электрические машины. М.: Энергия, 1980.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. М.: Высш. школа, 1978.
3. Кифер И.И. Испытания ферромагнитных материалов. М.: Энергия, 1969.