Ефремов И.В., Янчук Е.Л.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ СЕТИ МОНИТОРИНГА ЗАГРЯЗНЕНИЙ АТМОСФЕРЫ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

В данной работе рассмотрены математические аспекты оптимизации размещения точек контроля динамики загрязнения атмосферы, проведен анализ методов оптимизации. Предложена методика оптимального размещения точек контроля, основанная на минимизации погрешностей линейной интерполяции функции, описывающей поле концентрации загрязняющих веществ.

Одним из вариантов решения задачи пространственно-временной идентификации загрязнений атмосферы промышленных центров является развитие сети автоматизированных постов.

Совершенствование систем автоматизированного контроля загрязнений окружающей среды представляет собой сложную задачу, включающую выбор оптимального количества датчиков и параметров среды, контролируемых системой, достижение необходимой точности и диапазона измерений, удовлетворяющих требованиям достоверности. Одна из основных задач – оптимальное размещение на данной территории точек контроля.

Образованная из таких точек сеть наблюдения является основным, а может быть, и единственным объективным средством контроля загрязнения атмосферы и применимости различных математических моделей рассеяния примесей в условиях современных городских территорий. Организационная структура сети точек контроля загрязнений атмосферы определяется в значительной степени целями, для которых используются данные, полученные из постов наблюдения.

Анализ работ, посвященных вопросам исследования и разработке методик оптимального размещения сети, позволяет выделить несколько групп. К первой группе работ можно отнести исследования, основанные на разбиении территории города на зоны, обладающие характерными признаками. Несмотря на очевидную простоту и наглядность данной методики, существует субъективность выбора зон, а в некоторых случаях – и невозможность их выявления по территории.

Работами Вейберга Б.И., Пламиского М.Н., Томащевича П.К., Дроздова О.А. были развиты методики размещения сети контроля на основе методов статистического и объективного анализа. Указанные методики основаны на разработке критериев получения необходимой информации с наибольшей возможной точностью.

Дроздов О.А. и Шепелевский А.П. разработали метод рационализации сети, основанный на линейной интерполяции. Получено, что средняя квадратичная ошибка интерполяции измерений может быть определена по значениям структурной функции величины с помощью формулы:

$$E(\rho) = F\left(\rho/2\right) - \frac{1}{4}F(\rho) + \frac{1}{2}\varepsilon^2, \qquad (1)$$

где $E(\rho)$ – средняя квадратичная ошибка интерполяции,

ρ – расстояние между постами контроля,

ε – средняя квадратичная ошибка измерения,

$F(\rho)$ – пространственная, ненормированная структурная функция рассматриваемой величины.

Работы по линейной интерполяции были дополнены и усовершенствованы с появлением методов оптимальной интерполяции, развитых в работах Таидина Л.С. Аналогичный подход был развит в работах Безуглой Э.Ю., Кшенга В.В., Торшиева А.М., где показано, что зависимость структурной функции от расстояния между станциями достаточно хорошо аппроксимируется формулой:

$$F(\rho) = A * \rho^{0.75}, \qquad (2)$$

где $A = 0{,}0025$ для NO_2 и $0{,}0023$ для SO_3.

Указанные методы статистического и объективного анализа данных наблюдения для рационализации сети представляют значительный практический интерес, однако принцип и расстановку станций независимо от того, берется ли за основу расстояние, на котором ошибка интерполяции или экстраполяции достигает экстремума, необходимо рассматривать с учетом физико-химических закономерностей распространения загрязнений между точками контроля. Другим важным фактором, ограничивающим применение указанных методов оптимизации сети, является то, что не производится учет влияния источников выбросов, являющихся главной причиной антропогенного загрязнения атмосферы.

В настоящее время наиболее распространенным способом оптимизации сети контроля загрязнений являются подходы, основанные на применении уравнения турбулентной диффузии. Теоретические исследования турбулентной диффузии примесей указывают на сложный характер распределения примесей в атмосфере. Количественная сторона изменения содержания примесей выражается моделью переноса, определяемой уравнением баланса примеси:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+U\frac{\partial C}{\partial x}+V\frac{\partial C}{\partial y}+w\frac{\partial C}{\partial z}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}r_x\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}r_y\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}r_z\frac{\partial C}{\partial z}+E\,, \qquad (3)$$

где C – концентрация примеси;

U, V, w – составляющие скорости воздуха по осям x, y, z;

r_x, r_y, r_z – горизонтальные и вертикальные составляющие коэффициента турбулентного обмена;

E – функция источника (стока).

Уравнение (3) имеет первый порядок по t и второй порядок по переменным x, y, z. Следовательно, необходимо дополнить уравнение (3) начальными и граничными условиями. Начальное условие зададим в виде начального поля концентрации:

$$C(x,y,z,t)\big|_{t=0}=C_0(x,y,z). \qquad (4)$$

Граничные условия на бесконечных удалениях от источников принимаются в соответствии с предположением об убывании концентрации до нуля при стремлении x, y, z к бесконечности:

$$C\to 0 \quad \text{при} \quad z\to\infty\,; \qquad (5)$$

$$C\to 0 \quad \text{при} \quad |x|,|y|\to\infty\,. \qquad (6)$$

Для упрощения задачи часто принимают, что средний турбулентный поток примеси у земной поверхности мал, т. е.

$$k_z\frac{dC}{dZ}=0 \quad \text{при} \quad z=0. \qquad (7)$$

В общем случае условие на поверхности (при взаимодействии примеси с поверхностью):

$$k_z\frac{dC}{dZ}=bc \quad \text{при} \quad z=0\,,$$

где b – постоянная, характеризующая взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью.

Функцию источника E можно представить в виде суммы величин, отвечающих за поступление примеси, и величин, характеризующих вывод примеси из атмосферы:

$$E=G-K-L\,, \qquad (8)$$

где G – интенсивность поступления примесей в атмосферу от различных источников; K – скорость выведения примесей из атмосферы за счет атмосферных осадков; L – скорость выведения примесей за счет химических превращений.

Величина K – связывается с интенсивностью атмосферных осадков и принимается в некоторых случаях в виде:

$$K=\alpha * I * C\,, \qquad (9)$$

где α – постоянная; I – интенсивность осадков.

Одним из сложных моментов является определение коэффициента L. Эта величина может принимать как положительные, так и отрицательные значения, когда данная примесь в результате превращений исчезает или переходит в другую.

Пусть на заданной территории имеются источники загрязнения атмосферы, выбрасывающие загрязняющие вещества. На данной территории имеется так же N станций контроля загрязнений, каждая из которых регистрирует m веществ $(m<n)$ в моменты времени $t_1, t_2.....t_n$ через интервал Δt. В результате проведения измерений в N точках получен ряд наблюдений объема $N\times L$, где L – моменты времени проведения измерений для каждой i-ой примеси. Тогда в общем случае для i-ой примеси можно записать

$$\frac{\partial C_i}{\partial t}=-U\frac{\partial C_i}{\partial x}-V\frac{\partial C_i}{\partial y}-w\frac{\partial C_i}{\partial z}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}r_x\frac{\partial C_i}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}r_y\frac{x_i}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}r_z\frac{x_i}{\partial_z}+E_i\,. \qquad (10)$$

Сформулируем задачу сети контроля за загрязнением атмосферы как определение координат месторасположения N станций контроля таким образом, чтобы погрешность восстановления поля концентраций по измеренным концентрациям в точках контроля была минимальной.

Рассмотрим случай распространения примеси от мгновенного точечного источника в трехмерном пространстве при условии изотропности процесса, когда $r_x=r_y=r_z=r=\text{const}$. Пусть для простоты направление ветра совпадает с осью x и функция источника $E_i=0$.

Уравнение (8) примет вид:

$$\frac{dC_i}{dt}=-U\frac{\partial C_i}{\partial x}+r\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right). \qquad (11)$$

Имеем уравнение, содержащие вторые производные по координатам и первую производную по времени. Следовательно, необходимо задать по два граничных условия для каждой координаты и одно начальное условие.

$$C=C_0(x,y,z) \quad \text{при} \quad t=0\,; \qquad (12)$$

$$C\to 0 \quad \text{при} \quad x\to\pm\infty,\; y\to\pm\infty,\; z\to\pm\infty\,. \qquad (13)$$

Введем новые переменные:

$$x'=x-\overline{U}t\,, \qquad t'=t \qquad (14)$$

учитывающие скорость ветра.

Используя правила замены переменных, получим

$$\frac{\partial C}{\partial t'}=\Re\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}\right). \qquad (15)$$

Решением уравнения (15) является функция:

$$C(x,y,z,t)=\frac{Q}{\left(\sqrt{4\pi\Re t}\right)^3}e^{\frac{-(x-\overline{U}t)^2+y^2+z^2}{4\Re t}}\,. \qquad (16)$$

Уравнение (16) показывает изменение концентрации примеси, выбрасываемой мгновенным точечным источником, в результате переноса примеси со скоростью $\overline{U}$ вдоль оси x.

При функции источника E_i, отличной от нуля, нулевых начальных условиях и граничных условиях

$$C \to 0: \quad \text{при } x \to \pm\infty,\ y \to \pm\infty,\ z \to \pm\infty .$$

Имеем

$$\frac{\partial C}{\partial t'} = \Re\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) + E_i(x,y,z,t). \quad (17)$$

В общем случае для граничных и начальных условий в виде

$$C(0,t) = \mu(t) \quad \text{и} \quad C(x,y,z,0) = \varphi(x),$$

решение неоднородного уравнения (17) можно представить в виде суммы

Для простоты рассмотрим одномерный случай

$$C_1(x,t) + C_2(x,t) + C_3(x,t) = C(x,t), \quad (18)$$

где $$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(\Re t)^3}}\left\{e^{\frac{-(\alpha-\xi)^2}{4\Re t}} - e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4\Re t}}\right\}\varphi(\xi)d\xi, \quad (19)$$

$$C_2 = \frac{\Re}{2\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t} \frac{x}{(\Re(t-t'))^{3/2}} e^{\frac{-x^2}{4\Re(t-t')}}\mu(t')dt', \quad (20)$$

$$C_3 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^J \frac{1}{\sqrt{\Re(t-t')}}\left\{e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4\Re(t-t')}} - e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4\Re(t-t')}}\right\}E(x,t)d(\xi)dJ, \quad (21)$$

C_1, C_2 – решение первой краевой задачи для полубесконечной прямой для однородного уравнения (17), т. е. когда $E_i(x,y,z,t) = 0$; C_3 – решение неоднородного уравнения (17) (при $E_i(x,y,z,t) \neq 0$) при нулевых начальных и граничных условиях. В дальнейшем ограничимся одномерным случаем, когда $y = 0$ и $z = 0$.

В разделах математики доказывается, что функция

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-t_0)}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \quad (22)$$

является фундаментальным решением уравнений параболического типа. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$G(x,\xi,t-t_0) = G * M_i, \quad (23)$$

где M – мощность источника выбросов, представляет собой концентрацию в точке x в момент времени t, если в начальный момент $t = t_0$, в точке ξ выделяется примесь в количестве M_i.

Следовательно, имеем поле концентраций, представляющее собой функцию координат и времени. Известно, что любую функцию можно разложить по степеням x, т. е. описать многочленом. В простейшем случае, используя первые члены разложения, участок кривой между точками отсчета можно представить параболой.

Таким образом, задача оптимального размещения точек контроля загрязнения атмосферы сводится к определению координат точек, по результатам измерений в которых можно восстановить поле концентрации с заданной погрешностью Δ_m. Погрешность линейной интерполяции будет представлять собой разность между этой параболой и ее хордой, соединяющий смежные отсчеты.

Как известно, парабола имеет наибольшие отклонения от хорды в середине интерполяции Δx с абсолютным значением Δm:

$$\Delta m = \frac{C''(x_i,\xi_i,(t-t_0))\Delta x^2}{8}, \quad (24)$$

где $C''(x_i,\xi_i,(t-t_0))$ – вторая производная функции $C(x_i,\xi_i,(t-t_0))$ по x.

Вторая производная функции (21) равна:

$$C_i'' = \frac{M_i}{2\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{\left[a^2(t-t_0)\right]^{3/2}} + \frac{(x-\xi)^2}{4\left[a^2(t-t_0)\right]^{5/2}}\right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}. \quad (25)$$

С целью упрощения положим: $\xi = 0$; $t_0 = 0$; $a = 1$, тогда

$$C_i'' = \frac{M_i}{4\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{t^{3/2}} + \frac{x^2}{2t^{5/2}}\right]e^{\frac{-x^2}{4a^2 t}}. \quad (26)$$

Из (24) имеем:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{8\Delta m}{C_i''}}. \quad (27)$$

Введем приведенную погрешность γ_m, равную:

$$\gamma_m \equiv \frac{\Delta m}{C_{max}}, \quad (28)$$

где C_{max} – максимальное значение концентрации, которое задается априори (например $C_{max} = 10C_{ПДК}$, где $C_{ПДК}$ – предельно допустимая концентрация i-го загрязнения).

Подставим (28) в (27) и оценим максимально допустимое расстояние Δx между станциями контроля:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{80 \cdot \gamma_m \cdot C_{ПДК}}{\left(C_{i\max}''\right)}}. \quad (29)$$

Соотношение (29) позволяет определить максимальное расстояние между точками контроля загрязнений, находящимися на удалении x от источника выброса, при котором погрешность восстановления профиля загрязнений не превысит погрешности γ_m.