Е.В. Квитек, В.Д. Шевеленко

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, АППРОКСИМИРУЕМЫХ СПЛАЙНАМИ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

В работе рассматривается возможность повышения точности идентификации технологических процессов путем перехода от представления их во временной области к представлению сплайнами в частотной области.

Определение итерационными методами коэффициентов аппроксимирующего полинома порядка «m» на основании «n» отсчетных значений периодизируемого технологического процесса является важнейшей процедурой идентификации при осуществлении управления по «эталонным» моделям. Аппроксимация функции на большом промежутке одним многочленом может потребовать для достижения заданной точности значительного увеличения его степени, что неприемлемо при работе в реальном времени.

Возможности, создаваемые использованием сплайнов как алгебраических полиномов, не могут быть реализованы в случае идентификации параметров технологических процессов, информацию об изменениях которых принято представлять в частотной области.

Повышение точности параметрической идентификации в реальном времени возможно лишь на основе сравнения преобразований в частотной и временной областях.

Т. к. воспроизведение «эталонного» технологического процесса реальным оборудованием нецелесообразно по экономическим и метрологическим соображениям (из-за его износа), то выходом из положения может быть получение однократной «эталонной» записи интересующих параметров процесса с последующей их периодизацией для осуществления идентификации соответствующих зависимостей параметров реального технологического процесса (в виде сигналов).

Для реализации процедуры идентификации во временной и частотной областях в качестве аппроксимирующего полинома должен быть выбран осуществляющий связь между этими областями тригонометрический полином

$$Q_m(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t\right), \qquad (1)$$

как обеспечивающий минимум энергии ошибки аппроксимации периодических функций $f(t)$ так, чтобы

$$Q_m(t_i)=f(t_i),$$

где $0\le t_0,<t_1<\ldots<t_{2n}<\frac{2\pi}{\omega}=T$ – точки промежутка [0, T], являющегося периодом T технологического процесса.

Процедура идентификации во временной области сопряжена с необходимостью реализации следующих этапов:

1. период T разбивается на n интервалов $h=\frac{T}{n}$, и в точках $t_i=i\cdot h$ осуществляется процесс дискретизации $f(t)$, т. е. получение отсчетов $y_i=f(t_i)$.

2. для определения коэффициентов аппроксимирующего полинома составляется следующая система уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}
y_0=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k\cos k\frac{2\pi}{T}t_0+b_k\sin k\frac{2\pi}{T}t_0\right),\\
y_1=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k\cos k\frac{2\pi}{T}t_1+b_k\sin k\frac{2\pi}{T}t_1\right),\\
-----------------------\\
y_{2n}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k\cos k\frac{2\pi}{T}t_{2n}+b_k\sin k\frac{2\pi}{T}t_{2n}\right)
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

коэффициенты которой a_0, a_k и b_k должны быть подобраны итерационными методами на ЭВМ так, чтобы удовлетворять ей.

3. по найденным значениям a_0, a_k и b_k синтезируется полином (1) и определяется мера его отклонения от функции $f(t)$ на множестве точек t_0, $t_1,\ldots t_{2n}$

$$S_m(t_i)=\sum_{i=0}^{2n}\left[Q_m(t_i)-f(t_i)\right]^2. \qquad (3)$$

Установление допуска на различие между мерой отклонения полинома (1) от «эталонной» функции $f_э(t)$ и мерой его отклонения от функции $f_к(t)$ контролируемого технологического процесса позволяет проводить идентификацию при обеспечении соответствия отсчетов $f_э(t)$ и $f_к(t)$.

Т. к. $f(t)$ – периодизированная реализация «эталонного» технологического сигнала, то ее можно представить суперпозицией

$$f(t)=f_э(t,\omega_в)+f_{ош}(t),$$

в которую входит «эталонный» сигнал $f_э(t,\omega_в)$ со спектром, ограниченным значением $f_в$, а также сигнал ошибки аппроксимации $f_{ош}(t)$ со спектром, занимающим в общем случае бесконечную полосу частот $f > f_в$.

Спектры указанных сигналов не перекрываются, поэтому сигналы $f_э$ и $f_{ош}$ ортогональны, а их энергии, т. е. квадраты норм, складываются:

$$\|f(t)\|^2 = \|f_э(t, \omega_в)\|^2 + \|f_{ош}(t)\|^2 .$$

Меру ошибки аппроксимации принято [1] определять нормой сигнала ошибки. Если $W_s(\omega)$ – энергетический спектр сигнала $f(t)$, то по теореме Рэлея

$$\|f_{ош}(t)\| = \left(\frac{1}{\pi}\int_{\omega_в}^{\infty} W_s(\omega)d\omega\right)^{\frac{1}{2}}$$

Одновременно обобщенная формула Рэлея открывает возможность получения информации об изменениях параметров технологических процессов в частотной области.

Действительно, положив в (1) $a_k = b_k = 1$, тригонометрический полином превращаем в равноамплитудный, членами которого являются гармонические колебания

$$u_k(t) = \cos k\omega t + \sin k\omega t = \sqrt{2}\sin\left(k\omega t + \frac{\pi}{4}\right),$$

«m»-ая сумма которых в соответствии с [2]

$$Q_m(t) - \frac{a_0}{2} = \frac{\sin\frac{m+1}{2}\omega t \cdot \sin\frac{m}{2}\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\omega t}{2}} \qquad (4)$$

представляет простейший тип сплайна в частотной области (каждой точке частотной оси $k\omega = k\frac{2\pi}{T}$ соответствует единичное значение амплитуды). Такой простейший тип сплайна может обеспечить получение информации о спектре сложного напряжения, возникающего на выходе частотнозависимого четырехполюсника при воздействии на входе сплайна (4).

При идентификации частотных характеристик каналов передачи информации регистрация изменений частотной характеристики контролируемого канала относительно частотной характеристики образцового должна осуществляться в конечном числе точек, а потому для получения неискаженной информации необходимо, чтобы амплитудный спектр выходного сигнала повторял форму амплитудно-частотной характеристики (АЧХ), а его фазовый спектр – форму фазо-частотной характеристики (ФЧХ).

Действительно, сумме полинома (4) соответствует спектр

$$\dot{A}_{n1} = \frac{2U_m}{T}\int_0^T e^{-jn\omega t}\sum_{k=1}^{m}\sin\left(k\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} U_m e^{-j\frac{\pi}{4}} \text{ - } n \in 1 \div N; \\ 0 \text{ - } n \notin 1 \div N; \end{cases}$$

При воздействии этого сигнала на входе исследуемого четырехполюсника выходной сигнал последнего на основании интеграла Дюамеля

$$f_2(t) = \frac{U_m}{2j}\left[\sum_{k=1}^{N} e^{j\left(k\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}\int_0^T g(\tau)e^{-jk\omega\tau}d\tau - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{N} e^{-j\left(k\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}\int_0^T g(\tau)e^{jk\omega\tau}d\tau\right], \qquad (5)$$

где $\int_0^T g(\tau)e^{-jk\omega\tau}d\tau$ – комплексная частотная характеристика четырехполюсника при $\omega_0 = k\omega$, а $g(\tau)$ – его импульсная реакция.

Сигналу (5) соответствует спектр

$$\dot{A}_{n2} = \frac{2}{T}\int_0^T f_2(t)e^{-jk\omega t}dt = \begin{cases} U_m e^{-j\frac{\pi}{4}}\int_0^T g(\tau)e^{-jk\omega\tau}d\tau \text{ - } n \in 1 \div N; \\ 0 \text{ для всех дpугих } n. \end{cases}$$

Динамический коэффициент передачи четырехполюсника

$$K(jn\omega) = \frac{\dot{A}_{n2}}{\dot{A}_{n1}} = \begin{cases} \int_0^T g(\tau)e^{-jk\omega\tau}d\tau \text{ - } n = k \in 1 \div N; \\ 0 \text{ для всех дpугих } n. \end{cases}$$

в контролируемых точках частотной оси $(\omega,\ 2\omega, ...N\omega)$ совпадает с комплексной частотной характеристикой, определяемой в статическом режиме (путем задания фиксированных значений чаятоты генератора гармонических колебаний), а равенство амплитуд гармонических колебаний кратных частот, образующих испытательный сигнал (4), процедуру нормировки превращает в операцию масштабного преобразования с неизменным для каждой точки АЧХ значением масштабного коэффициента.

Из сравнения (1) и (5) следует, что выходной сигнал четырехполюсника является интерполяционным многочленом, амплитуды и начальные фазы членов которого несут информацию о компонентах частотной характеристики четырехполюсника: АЧХ и ФЧХ.

Дальнейшие преобразования выходных сигналов: «эталонного» и контролируемого с целью идентификации каналов основаны на использовании обобщенной формулы Рэлея, устанавливающей связь между автокорреляционной функцией и энергетическим спектром выходного сигнала соответствующего канала:

$$\left(u_{вых}, u_{\tau_{вых}}\right) = B_k(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|U_{вых}(\omega)\right|^2 e^{j\omega\tau} d\omega$$

В соответствии с принятой технологией определения АЧХ четырехполюсников входные сигналы «эталонного» и контролируемого четырехполюсников должны быть представлены в виде суперпозиции низкочастотных $f_{2_{нч}}(t)$, среднечастотных $f_{2_{сч}}(t)$ и высокочастотных $f_{2_{вч}}(t)$ колебаний, т. е. для их появления на выходе четырехполюсников на входы последних должны быть поданы равноамплитудные полиномы (частотные сплайны) с соответствующими (равными по числу N участвующих в образовании входного воздействия) наборами равных по амплитуде колебаний кратных частот.

Выходной эффект в каждом из названных диапазонов (НЧ, СЧ и ВЧ) частот также представляет частотные сплайны, амплитуды и фазы колебаний которых несут информацию о характере АЧХ и ФЧХ «эталонного» и контролируемого каналов.

Представив спектры входных и выходных вещественных периодических сигналов $f_N(t)$ и $f_2(t)$ в виде суммы вещественных и мнимых частей

$$S_N(\omega) = A_{S_N}(\omega) + jB_{S_N}(\omega) \text{ и}$$

$$S*_N(\omega) = A_{S_N}(\omega) - jB_{S_N}(\omega);$$

$$S_2(\omega) = A_{S2}(\omega) + jB_{S2}(\omega),$$

убеждаемся, что взаимный энергетический спектр входного и выходного сигналов $W_{S_N S_2}$ – функция, принимающая в общем случае комплексные значения:

$$W_{S_N S_2} = A_{S_N} A_{S_2} + B_{S_N} B_{S_2} + j\left(B_{S_2} A_{S_N} - A_{S_2} B_{S_N}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}W_{S_N S_2} + j\mathrm{Im}W_{S_N S_2}.$$

Нетрудно заметить, что $\mathrm{Re}W_{S_N S_2}$ – четная, а $j\mathrm{Im}W_{S_N S_2}$ – нечетная функция частоты, а потому вклад в интеграл

$$\left(f_N, f_2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_{S_N S_2} d\omega$$

дает только вещественная часть, а потому

$$\left(f_N, f_2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \mathrm{Re}W_{S_N S_2} d\omega.$$

Если сигнал $f_2(t)$ подвергнуть ортогонализации путем

$$f_2'(t) = f_2(t) - f_N(t),$$

то скалярное произведение вещественных сигналов $S_N(t)$ и $f_2'(t)$

$$\left(f_2', f_N\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_2'(\omega) S*_N(\omega) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W'_{S_N' S_2}(\omega) d\omega = \frac{1}{\omega}\int_{0}^{\infty}\left[A_{S_2'} A_{S_N} - A^2{}_{S_N}\right] d\omega,$$

откуда очевидна эффективность дифференциального метода идентификации.

Таким образом, возможность представления сигналов сплайнами в частотной области создает условия для раздельной регистрации изменений их спектров без проведения нормировки, что сокращает объем измерительных процедур и позволяет повысить точность идентификации.

Список использованной литературы:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972.
2. Цыкин А.Г. Математические формулы. М.: Наука, 1985, с. 88.