

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ И ТЕПЛОБМЕНА ПРИ ПУЛЬСАЦИЯХ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА

Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая теплофизические и динамические процессы при осцилляциях газового пузырька. Предложен алгоритм численного решения и приведены результаты решения.

В работе [1] была рассмотрена задача о колебаниях газового пузырька в вязкой электропроводной жидкости, помещенной в магнитное поле, и выведена система уравнений, описывающая динамические и тепловые процессы. Интегрирование системы было проведено в условиях адиабатичности межфазной границы «пузырек – жидкость». При больших импульсах воздействия, выводящих пузырек из состояния равновесия, условие адиабатичности нарушается: процессы теплообмена между газом в пузырьке и окружающей жидкостью становятся определяющими и начинают влиять на динамику пузырька. В связи с этим возникает необходимость совместного рассмотрения уравнений динамики и энергии.

Система уравнений неразрывности, импульсов и энергии для каждой из фаз (несущая фаза – вязкая несжимаемая электропроводная жидкость, дисперсная – сферический гомобарический пузырек с термически совершенным газом) в эйлеровых координатах (r, t) после осреднения плотности электромагнитной силы по сферическому слою с учетом джоулевой диссипации выписываем в виде [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(\rho_1^0 w_1) &= 0, \\ \frac{\partial \rho_2^0}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho_2^0 w_2 r^2) &= 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho_1^0} \frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\sigma w_1 B^2}{\rho_1^0} + v \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} - 2 \frac{w_1}{r^2} \right) \\ \rho_1^0 c_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_1 r^2 \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + 12 \frac{w_1^2}{r^2} + \frac{2}{3} \sigma w_1 B^2, \\ p_2(t) &= R_2 \rho_2^0 T_2, \\ \rho_2^0 c_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial t} + w_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_2 r^2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \frac{dp_2}{dt}. \end{aligned}$$

Здесь индекс «1» относится к жидкой фазе, а «2» – к газовой; ρ_i^0 – истинная плотность, c_i – удельная массовая теплоемкость, λ_i – теплопроводность, w_i – скорость, p_i – давление, w_i – скорость, T_i – температура i -ой фазы, v, μ – кинематический и динамический коэффициенты вязкости

жидкой фазы, B – индукция магнитного поля, R_2 – удельная газовая постоянная.

Для численного исследования выписанной системы уравнений перейдем к новым безразмерным переменным $t_* = t/t_0$ – время, $\eta = r/a(t)$ – радиус, где $a(t)$ – текущий радиус пузырька, $a t_0$ – характерное время задачи, причем [2]:

$$t_0 = \frac{a_0}{\sqrt{\rho_0/\rho_1^0}}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\right)_r = \frac{\partial}{\partial t} \left(\right)_\eta - \frac{\dot{a}}{a} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\right),$$

и преобразуем ее к безразмерному виду.

Уравнение динамики пузырька (уравнение Рэлея-Ламба)

$$\begin{aligned} a_* \frac{d^2 a_*}{dt_*^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{da_*}{dt_*} \right)^2 + \frac{2}{3} \frac{Ha^2}{Re_1} a_* \frac{da_*}{dt_*} + \\ + \frac{4}{Re_1} \frac{1}{a_*} \frac{da_*}{dt_*} + \frac{2}{We_1} \frac{1}{a_*} = p_* - (k+1), \end{aligned} \quad (1)$$

где k – параметр возмущения.

Уравнение энергии жидкой фазы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial t_*} + \frac{\dot{a}_*}{a_*} \left(\frac{1}{\eta^2} - \eta \right) \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} = \frac{1}{Pe_1} \frac{1}{a_*^2} \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\eta} \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} \right) + \\ + 12 \frac{Ec_1}{Re_1} \left(\frac{\dot{a}_*}{a_*} \right)^2 \frac{1}{\eta^6} + \frac{2}{3} \frac{Ha^2 Ec_1}{Re_1} \frac{\dot{a}_*^2}{\eta^4}. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение для давления газа в пузырьке

$$\frac{dp_*}{dt_*} = 3(\gamma-1) \frac{\rho_*}{Pe_2 Ec_2} \frac{1}{a_*^2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} - 3\gamma p_* \frac{\dot{a}_*}{a_*}. \quad (3)$$

Уравнение для скорости в газовой фазе

$$w_{2*}(\eta, t_*) = \frac{\rho_*}{Pe_2 Ec_2} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{p_* a_*} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} - \frac{1}{3\gamma} \frac{dp_*}{dt_*} \eta. \quad (4)$$

Уравнение энергии для газовой фазы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_2}{\partial t_*} + \frac{w_{2*} - \eta \dot{a}_*}{a_*} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} = \\ = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_*}{Pe_2 Ec_2} \left(\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\eta} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right) + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\theta_2}{p_*} \frac{dp_*}{dt_*}. \end{aligned} \quad (5)$$

Система уравнений (1)-(5) является замкнутой. Неизвестными в ней являются: $a_*(t_*)$ – при-

веденный радиус пузырька, $p_*(t_*)$ – приведенное давление, $w_{2*}(\eta, t_*)$ – приведенная скорость газа, $\theta_1(\eta, t_*), \theta_2(\eta, t_*)$ – приведенные температуры в фазах, причем все неизвестные функции определены так:

$$a_* = \frac{a(t)}{a_0}, p_* = \frac{p(t)}{p_0}, w_{2*} = \frac{w_2(r, t)}{v_0},$$

$$\theta_1 = \frac{T_1(r, t)}{T_0}, \theta_2 = \frac{T_2(r, t)}{T_0},$$

где $v_0 = a_0/t_0$ – характерная скорость, а все другие величины с индексом «0» относятся к начальным параметрам, γ – показатель адиабаты.

Краевые условия для системы уравнений (1)-(5) задаются в виде

$$t_* = 0: a_* = 1, \dot{a}_* = w_* = 0, \theta_1(\eta, 0) = 1, \theta_2(\eta, 0) = 1, \quad (6)$$

$$\eta = 0: \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} = 0, \theta_2 < \infty, \quad (7)$$

$$\eta = 1: \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} = \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta}, \theta_2(1, t_*) = \theta_1(1, t_*), \quad (8)$$

$$\eta = \infty: \theta_1(\infty, t_*) = 1. \quad (9)$$

Критерии и числа задачи определены так:

$$Na = a_0 B \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} - \text{число Гартмана,}$$

$$Re_1 = \frac{a_0 v_0}{\nu} - \text{число Рейнольдса,}$$

$$We_1 = \frac{\rho_1^0 v_0^2}{\Sigma/a_0} - \text{число Вебера,}$$

где Σ – коэффициент поверхностного натяжения,

$$Pe_1 = \frac{a_0 v_0}{\lambda_1/(\rho_1^0 c_1)}, Pe_2 = \frac{a_0 v_0}{\lambda_2/(\rho_{20}^0 c_2)} - \text{числа Пекле,}$$

$\rho_* = \frac{\rho_{20}^0}{\rho_1^0}$ – приведенная плотность фаз, ρ_{20}^0 – истинная плотность газовой фазы в начальный момент времени.

Обыкновенные дифференциальные уравнения системы (1) и (3) в дальнейшем удобнее представить в виде

$$\frac{d^2 a_*}{dt_*^2} = F_a(a_*, \dot{a}_*, p_*), \quad (10)$$

$$\frac{dp_*}{dt_*} = F_p(a_*, \dot{a}_*, p_*, q_*), \quad (11)$$

где через q_* обозначена производная $q_* = \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \right|_{\eta=1}$.

Заменим производные по временной и пространственной переменным конечными разностями вида:

$$\frac{\partial f(\eta, t)}{\partial t} = \frac{f(\eta, t + \delta t) - f(\eta, t)}{\delta t},$$

$$\frac{\partial f(\eta, t)}{\partial \eta} = \frac{f(\eta + \delta \eta, t) - f(\eta, t)}{\delta \eta}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 f(\eta, t)}{\partial \eta^2} = \frac{f(\eta + \delta \eta, t) - 2f(\eta, t) + f(\eta - \delta \eta, t)}{(\delta \eta)^2} \quad (13)$$

и введем сетку: $\eta = m\delta\eta, t = n\delta t, m = 0, 1, \dots, M; n = 0, 1, \dots, N, \delta\eta = L/M, \delta t = \tau/N$ – шаги по пространственной и временной переменным.

Уравнения (10) и (11) могут быть проинтегрированы по схеме Рунге-Кутты, например, четвертого порядка точности [3]. В этом случае для них можно написать следующие сеточные уравнения ($w_* = \dot{a}_*$):

$$a_{n+1} = a_n + w_n \delta t + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3) \delta t, \quad (14)$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (15)$$

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4), \quad (16)$$

где коэффициенты k_i и m_i ($i=1, 2, \dots, 4$) находятся через функции $F_a(a_*, \dot{a}_*, p_*)$ и $F_p(a_*, \dot{a}_*, p_*, q_*)$ согласно выбранной схеме [3], например,

$$k_1 = F_a(a_n, w_n, p_n) \delta t, m_1 = F_p(a_n, w_n, p_n, q_n) \delta t, \dots$$

Уравнение (4) на сетке $m\delta\eta, n\delta t$ записывается так

$$w_{n,m}^{(2)} = \frac{\rho_*}{Pe_2 Ec_2} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{q_n}{p_n a_n} - \frac{1}{3\gamma} F_p(a_n, w_n, p_n, q_n) m \delta \eta, \quad (17)$$

а уравнения энергии для газовой и жидкой фаз в виде

$$\theta_{n+1,m}^{(2)} = \theta_{n,m}^{(2)} + \delta t \left\{ \begin{array}{l} - \frac{w_n^{(2)} - m \delta \eta w_n}{a_n} \frac{\theta_{n,m+1}^{(2)} - \theta_{n,m}^{(2)}}{\delta \eta} + \\ + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\theta_{n,m}^{(2)}}{p_n} F_p(a_n, w_n, p_n, q_n) + \\ \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_*}{Pe_2 Ec_2} \frac{\theta_{n,m}^{(2)}}{p_n a_n^2} \cdot \\ \left(\frac{\theta_{n,m+1}^{(2)} - 2\theta_{n,m}^{(2)} + \theta_{n,m-1}^{(2)}}{(\delta \eta)^2} + \right. \\ \left. + \frac{2}{m \delta \eta} \frac{\theta_{n,m+1}^{(2)} - \theta_{n,m}^{(2)}}{\delta \eta} \right) \end{array} \right\}, \quad (18)$$

$$\theta_{n+1,m}^{(1)} = \theta_{n,m}^{(1)} + \delta t \times \left\{ \begin{aligned} & -\frac{w_n}{a_n} \left(\frac{1}{(m\delta\eta)^2} - m\delta\eta \right) \cdot \\ & \frac{\theta_{n,m+1}^{(1)} - \theta_{n,m}^{(1)}}{\delta\eta} + \frac{1}{\text{Re}_1 a_n^2} \times \\ & \left[\frac{\theta_{n,m+1}^{(1)} - 2\theta_{n,m}^{(1)} + \theta_{n,m-1}^{(1)}}{(\delta\eta)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{m\delta\eta} \frac{\theta_{n,m+1}^{(1)} - \theta_{n,m}^{(1)}}{\delta\eta} \right] + \\ & + 12 \frac{\text{Ec}_1}{\text{Re}_1} \left(\frac{w_n}{a_n} \right)^2 \frac{1}{(m\delta\eta)^6} + \\ & + \frac{2}{3} \frac{\text{Ha}^2 \text{Ec}_1}{\text{Re}_1} \frac{w_n^2}{(m\delta\eta)^4} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Начальные условия $t=0, n=0$ для пузырька записываются так:

$$a_0 = 1, w_0 = 0, p_0 = 1, q_0 = 0.$$

Начальное распределение температуры в газовой фазе

$$\theta_{0,m}^{(2)} = 1, m = 0, 1, 2, \dots, MG, MG = 1/\delta\eta.$$

Начальное распределение температуры в жидкой фазе

$$\theta_{0,m}^{(1)} = 1, m = MG, MG + 1, \dots, M.$$

Граничные условия:

а) в центре пузырька

$$m = 0: \theta_{n,0}^{(2)} = \theta_{n,1}^{(2)};$$

б) на межфазной поверхности

$$q_n = \frac{\theta_{n,MG}^{(2)} - \theta_{n,MG-1}^{(2)}}{\delta\eta},$$

$$\theta_{n,MG}^{(2)} = \theta_{n,MG}^{(1)}, \theta_{n,MG+1}^{(1)} = \theta_{n,MG}^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_n \delta\eta;$$

в) на бесконечности $\theta_{n,MG}^{(1)} = 1$.

На рисунке приведен текст ядра программы, написанной в среде программирования MatCad, реализующей эту разностную схему.

В первой строке программы объявляется массив динамических характеристик изучаемого процесса $T_{N,5}$: вектор $T_{N,0}$ хранит текущее приведенное время, $T_{N,1}$ – текущий приведенный радиус пузырька, $T_{N,2}$ – текущую приведенную скорость межфазной границы, $T_{N,3}$ – текущее давление в газе, $T_{N,4}$ – приведенную плотность теплового потока на межфазной границе, $T_{N,5}$ – производную давления по времени.

Во второй строке объявляется двумерный массив $\theta_{N,M}$ для хранения приведенных температур фаз. В вектор Q передается информация о начальном состоянии системы, которая хранится в

предварительно заданном векторе S. Далее программа выполняет два вложенных цикла: внутренний – по пространственной переменной $j=1, 2, \dots, M$, и внешний – по временной переменной $i=0, 1, \dots, N$. На каждом проходе временного цикла программа обращается к подпрограмме DS(Q) с передачей в нее динамических характеристик из вектора Q. Подпрограмма DS(Q) – это численная реализация одношагового метода Рунге-Кутты (в данном случае четвертого порядка точности); она рассчитывает динамические характеристики текущего состояния системы по ее предшествующему состоянию. Связь между динамической частью системы уравнений и теплофизической осуществляется через ячейку $T_{N,4}$. При каждом обращении к подпрограмме DS(Q) происходит заполнение одной строки матрицы $T_{N,5}$: эта информация используется при вычислении температур в узлах сетки. Данные о начальном распределении температуры хранятся в массиве Θ , откуда она считывается в локальный массив θ .

Во внутреннем цикле рассчитывается текущее значение пространственной переменной η , значение производной $q = \frac{\partial\theta_2}{\partial\eta}$, которая участвует в качестве аргумента функции $\text{FWG}(a_n, p_n, \text{FP}, q, \eta)$, вычисляющей локальную скорость газа в пузырьке. Эта функция предварительно должна быть описана (правая часть уравнения (17)). Положение узла сетки по пространственной переменной отслеживается двумя операторами условного сравнения «if»: если $\eta < 1$ ($m < MG$), то расчет температуры ведется для газовой фазы по уравнению (19); при $m = MG$ (межфазная граница) программа выполняет условия на границе и подсчитывает плотность теплового потока, посылая результат для хранения в ячейку $T_{N,4}$. При $m > MG$ (жидкая фаза) температура в узлах рассчитывается по формуле (20). После перебора пространственных узлов сетки программа удовлетворяет требованию $\frac{\partial\theta_2}{\partial\eta} = 0$, при $\eta = 0$ в центре пузырька и начинает новый цикл по временной переменной.

После завершения внешнего цикла данные о динамических параметрах процесса T и данные о температурах θ объединяются в единый массив, который становится доступным для всех последующих расчетов.

Ниже представлены результаты численного исследования динамических и теплофизических характеристик процесса колебаний газового пузырька в вязкой электропроводной жидкости, помещенной в однородное магнитное поле.

```

SIST := | TN,5 ← 0
        | θN,M ← 0
        | θ ← Θ
        | Q ← S
        | for i ∈ 0.. N-1
            | Ti,0 ← DS(Q)0
            | Ti,1 ← DS(Q)1
            | Ti,2 ← DS(Q)2
            | Ti,3 ← DS(Q)3
            | Ti,4 ← DS(Q)4
            | Ti,5 ← DS(Q)5
            | a ← Ti,1
            | w ← Ti,2
            | p ← Ti,3
            | q ← Ti,4
            | δp ← Ti,5
            | for j ∈ 1.. M-1
                | η ← j·δη
                | q ←  $\frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\delta\eta}$ 
                | if j ≤ MG
                    |  $\theta_{i+1,j} \leftarrow \theta_{i,j} + \delta t \cdot \left[ \frac{FWG(a, w, p, FP, q, \eta) - \eta \cdot w}{a} \cdot (-1) \cdot \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\delta\eta} \dots \right.$ 
                    |  $\left. + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{\rho}{Pe_2 \cdot Ec_2} \cdot \frac{\theta_{i,j}}{p \cdot a^2} \cdot \left( \frac{\theta_{i,j+1} - 2 \cdot \theta_{i,j} + \theta_{i,j-1}}{\delta\eta^2} + \frac{2}{\eta} \cdot \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\delta\eta} \right) \dots \right]$ 
                    |  $+ \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{\theta_{i,j}}{p} \cdot \delta p$ 
                | if j = MG - 1
                    |  $T_{i,4} \leftarrow \frac{\theta_{i, MG} - \theta_{i, MG-1}}{\delta\eta}$ 
                    |  $\theta_{i+1, MG+1} \leftarrow \theta_{i+1, MG} + T_{i,4} \cdot \delta\eta \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ 
                | if j > MG
                    |  $\theta_{i+1,j} \leftarrow \theta_{i,j} + \delta t \cdot \left[ \left( (-1) \cdot \frac{w}{a} \cdot \left( \frac{1}{\eta^2} - \eta \right) \cdot \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\delta\eta} \right) \dots \right.$ 
                    |  $\left. + \frac{1}{Pe_1 \cdot a^2} \cdot \left( \frac{\theta_{i,j+1} - 2 \cdot \theta_{i,j} + \theta_{i,j-1}}{\delta\eta^2} + \frac{2}{\eta} \cdot \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\delta\eta} \right) \dots \right]$ 
                    |  $+ 12 \cdot \frac{Ec_1}{Re_1} \cdot \left( \frac{w}{a} \right)^2 \cdot \frac{1}{\eta^6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{Ha^2 \cdot Ec_1}{Re_1} \cdot \frac{w^2}{\eta^4}$ 
                | θi+1,0 ← θi+1,1
                | Q ← (TT)(i)
            | augment(T, θ)
    
```

Рисунок: текст ядра программы, написанной в среде программирования MatCad

В качестве несущей фазы задавался жидкий галлий с теплофизическими свойствами при температуре 100°C , а дисперсной – воздух. Начальный радиус пузырька назначался равным 3 мм, начальное давление в газе $p(0)=100$ кПа. Исследовалась реакция системы на мгновенный сброс давления, поэтому параметр возмущения принимался равным $k=-0,5$, что соответствовало конечному давлению в системе 50 кПа. Показатель адиабаты воздуха задавался равным $\gamma=1,4$, индукция магнитного поля составляла $B=1$ Т.

Критерии задачи при этих данных были: $Re_1=39000$, $Pe_1=11360$, $Pe_2=393$, $Na=135$, $We_1=616$, $We_2=0,096$, $Ec_1=1,2 \times 10^{-4}$, $Ec_2=1,54 \times 10^{-4}$. Параметры сетки задавались равными: $M=20$, $N=1000$, $L=2$, $\tau=50$ и подбирались экспериментально из условия устойчивости конечно-разностной схемы. Контроль точности осуществлялся удвоением числа шагов по пространственной переменной.

На рисунке 1 показана зависимость давления p_* в пузырьке от времени t_* . Анализ кривой показывает, что время релаксации пузырька (время перехода системы к равновесному состоянию) можно разбить на две фазы: на первой фазе процесс характеризуется затухающими колебаниями всех динамических и тепловых параметров. На второй фазе пульсации динамических параметров исчезают, но тепловое равновесие еще не достигнуто, пузырек продолжает переход в равновесное состояние регулярным образом, так что в конце этой фазы между жидкостью и газом в пузырьке устанавливается термическое равновесие. Эта особенность привнесена магнитным полем, при отсутствии которого динамические и тепловые параметры системы переходят к новому состоянию равновесия синхронно. Данную особенность можно объяснить высокой интенсивностью гашения колебаний электромагнитными силами через механизм джоулевой диссипации. В результате чего резко сокращается осциллирующая фаза процесса, но температурные поля еще не успевают за это время прийти в состояние равновесия. С увеличением индукции магнитного поля длительность первой фазы, как показывают расчеты, сокращается. С быстрым исчезновением пульсаций пузырька термическое равновесие в системе не успевает возникнуть, и начинается вторая фаза – выравнивание температур между газом и жидкостью при уже достигнутом механическом равновесии пузырька. Необходимо отметить, что на этой фазе механизмы вязкой и джоулевой диссипации не работают по причине отсутствия пульсаций скорости.

В случае отсутствия магнитного поля рассеивание кинетической энергии колебательного процесса осуществляется близкодействующими вязкими силами, которые из-за малой вязкости жидкого галлия значительно удлиняют процесс затухания колебаний, так что температурные поля за это время успевают выравниваться.

На рисунке 2 показаны графики зависимостей температуры во времени в центре пузырька и на его поверхности.

Температура газа в центре пузырька безинерционно реагирует на колебания поверхности. После гашения колебаний температуры и в центре, и на поверхности пузырька начинают плавно нарастать до единицы. Из рисунка следует, что газ в

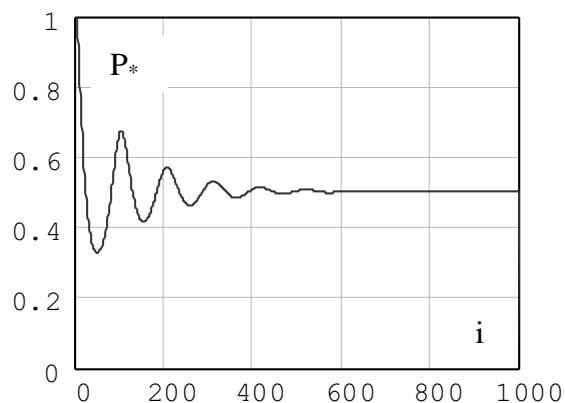


Рисунок 1. Зависимость приведенного давления p_* от временной переменной i . Переход к реальному времени осуществляется умножением i на $t_0/20$.

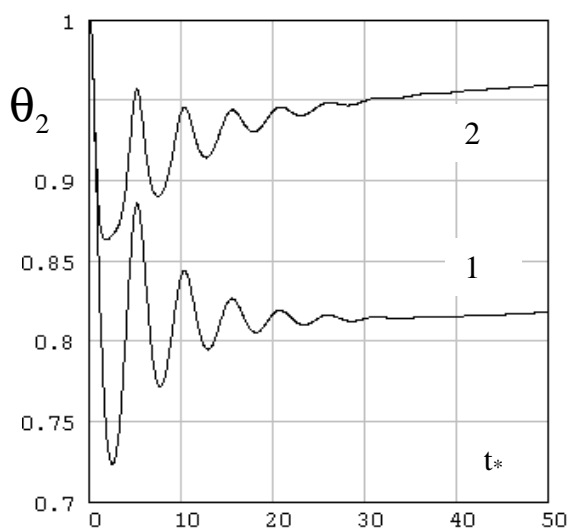


Рисунок 2. Зависимость приведенной температуры θ_2 от приведенного времени t_* при расширении газового пузырька: кривая 1 – центр пузырька, кривая 2 – поверхность пузырька. Переход к реальному времени осуществляется умножением t_* на t_0 .

центре пузырька подвергается большему охлаждению, чем на его периферии. На рис 3 показаны графики зависимости температуры от времени в жидкости на расстоянии одного и двух пространственных шагов от поверхности пузырька. Примыкающие к межфазной границе слои жидкости (кривая 1) подвержены значительным изменениям температур из-за соседних слоев переохлажденного газа в пузырьке. По мере удаления от межфазной границы вглубь жидкости тепловое влияние газа ослабевает, поэтому температура в жидкости лишь незначительно отклоняется от равновесного значения (кривая 2).

Графики, изображенные на рисунке 4, иллюстрируют пространственное распределение температуры в газе и жидкости в различные фазы первого периода колебаний пузырька.

Кривые на рисунке 4 показывают, что минимум давления газа в пузырьке сопровождается резким снижением температуры (кривые 1 и 3), а максимум температуры (кривая 2) соответствует наибольшему давлению в пузырьке. Обращает внимания тот факт, что температура в различные моменты времени остается однородной в центральной части газового пузырька. По мере приближения к поверхности пузырька начинает сказываться теплообмен между газом и окружающей жидкостью и температура в газе резко снижается до температуры почти изотермической жидкости. На небольшом удалении от межфазной границы в жидкости температура остается постоянной и равной своему начальному значению. Это объясняется тем, что из-за большой массы жидкости, коэффициента теплопроводности жидкой фазы, а также соизмеримой с газом теплоемкости жидкости влияние межфазного теплообмена сказывается только на примыкающем к пузырьку слое жидкости. В целом жидкая фаза ведет себя как изотермическая жидкость. Этот вывод касается только режима расширения пузырька в жидкости.

Межфазный теплообмен полностью характеризуется числом Нуссельта

$$Nu = \frac{2a(t)}{T_a - \langle T_2 \rangle} \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=a},$$

где T_a – температура на межфазной границе, а $\langle T_2 \rangle$ – среднemasсовая температура газа в пузырьке.

Выражение для числа Нуссельта с учетом уравнения состояния преобразуется к виду

$$Nu = \frac{2}{\theta_{\eta=1}^{(2)} - p_* a_*^3} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1}$$

На рисунке 5 показан график функции $Nu=Nu(t^*)$: на первой фазе процесса число Нуссельта испытывает пульсации, в целом оставаясь величиной положительной, а на второй – принимает почти постоянное значение, равное 12. Знакоположительность числа Нуссельта говорит о направлении теплового потока из жидкой в газовую фазу: т. е. при расширения пузырька он непрерывно подогревается теплотой окружающей жидкости.

В процессе релаксации пузырька происходит непрерывное рассеивание энергии возмущающего воздействия под воздействием механизмов вязкой, джоулевой и тепловой диссипации (неравновесный подвод и отвод теплоты). Удельный вклад этих механизмов определяется величиной рассеянной энергии.

Под воздействием вязких сил к моменту времени t будет превращена в теплоту кинетическая энергия, равная

$$Q_\mu(t) = \int_0^t \int_{V_0}^\infty 12 \frac{w_1^2}{r^2} dt dV = 16\pi\mu a_0 t_0 v_0^2 I_\mu(t), \quad V_0 = \frac{4}{3}\pi a^3(t),$$

где

$$I_\mu(t) = \int_0^{t_*} a_* w_*^2 dt_*.$$

Кинетическая энергия, превращенная в теплоту за счет джоулевой диссипации, будет равна

$$Q_j(t) = \int_0^t \int_{V_0}^\infty \frac{\langle j^2 \rangle}{\sigma} dt dV = \frac{8}{3}\pi\sigma V^2 \mu a_0^3 v_0^2 I_j(t),$$

где

$$I_j(t) = \int_0^{t_*} a_*^3 w_*^2 dt_*.$$

Теплота через межфазную границу определится следующим выражением

$$Q_\lambda(t) = \int_0^t \int_\Sigma q_a dt d\Sigma = -4\pi a_0 T_0 \lambda_2 t_0 I_\lambda(t),$$

где

$$I_\lambda(t) = \int_0^{t_*} a_* \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} dt_*.$$

Здесь через I_μ, I_j, I_λ обозначены диссипативные интегралы, на рисунке 6 показаны их графики.

Сравнение кривых показывает, что наименьший вклад в диссипацию кинетической энергии вносят силы вязкого трения (кривая 1), наибольший – тепловая диссипация (кривая 3). Джоулева диссипация является преобладающей лишь в начальной стадии процесса, когда велика амплитуда колебаний (кривая 2), но по мере гашения колеба-

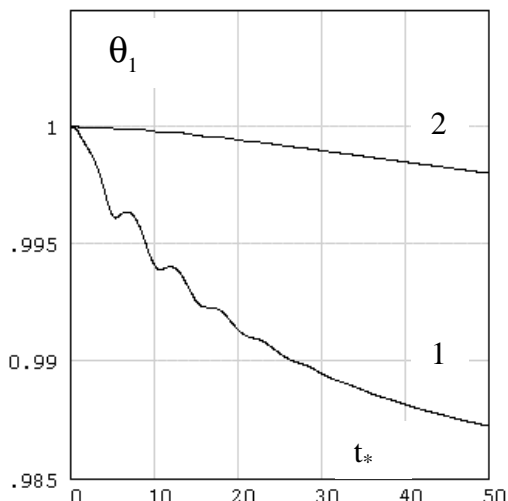


Рисунок 3. Зависимость температуры в жидкости θ_1 от приведенного времени t^* : кривая 1 – на расстоянии одного шага (dh), кривая 2 – двух шагов от поверхности пузырька.

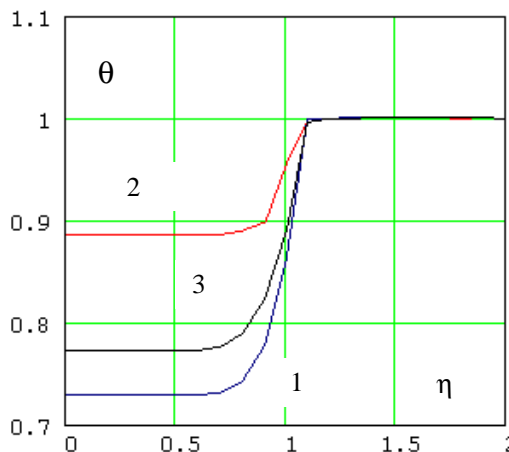


Рисунок 4. Распределение приведенной температуры по пространственной переменной h в системе «пузырек – жидкость» в различные фазы первого периода колебаний: кривая 1 – $wt=0$, 3 – $wt=T$, 2 – $wt=T/2$. Кривые 1 и 3 относятся к двум последовательным максимальным расширениям пузырька.

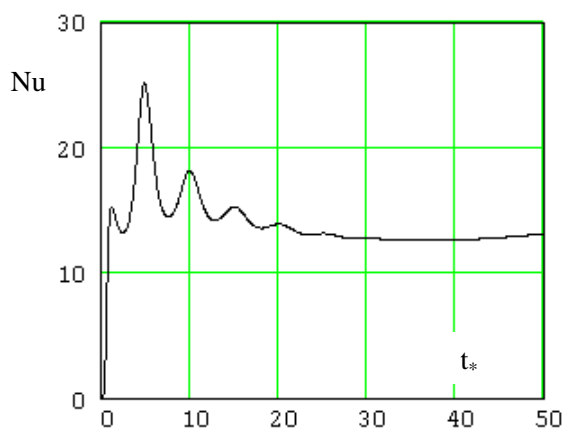


Рисунок 5. График функции $Nu(t^*)$

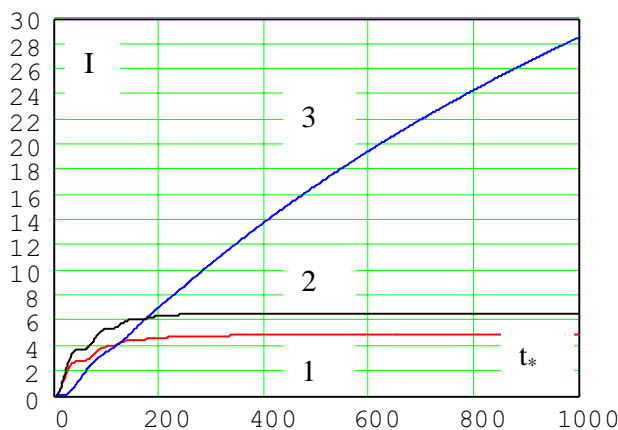


Рисунок 6. Зависимость диссипативных интегралов $I_i(t)$ от времени процесса: $I_\mu(t)$ – кривая 1, $I_j(t)$ – кривая 2, $I_\lambda(t)$ – кривая 3. Значения интегралов $I_\mu(t)$ и $I_j(t)$ увеличены в 50 раз.

ний механизм джоулевой диссипации прекращает работу – горизонтальный участок кривой 2. Термическое равновесие в системе при этом не достигнуто, и продолжается перекачка теплоты из окружающей жидкости в газовый пузырек, о чем свидетельствует рост интеграла $I_\lambda(t)$.

Проведенное исследование позволяет сделать вывод о том, что наличие магнитного поля

расщепляет динамические процессы диссипации энергии от тепловых. Подавляя первые, оно не влияет непосредственно на протекание второго, изменяя лишь характер этого процесса: теплообмен на второй стадии становится регулярным и не сопровождается больше пульсациями, характерными для нее в отсутствии магнитного поля.

Список использованной литературы:

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. – Т. 1, Т. 2. – 464 и 360 с.
 2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1974. – 831 с.