Г.А. Ивашкина

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ДАРБУ С ПАРАМЕТРАМИ α>0, β<0, 0<α+β<1

В работе для уравнения Эйлера-Дарбу с параметрами $\alpha>0$, $\beta<0$ и $0<\alpha+\beta<1$ рассматривается задача Коши в области, ограниченной линиями $\xi=0$, $\eta=1$, $\eta=\xi$ с краевыми условиями

$$U(\xi,\xi)=(\xi)=\tau\int_0^{\xi}T(t)(\xi-t)^{\mu}dt\ \ (\mu>-\beta),\ \lim_{\eta\to\xi}\frac{1}{2(1-\alpha-\beta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)(\eta-\xi)^{\alpha+\beta}=\nu(\xi)=\int_0^{\xi}G(t)(\xi-t)^{\delta}dt\ \ (\delta>\alpha-1).$$

Получено обобщенное решение $U(\xi,\eta)$, выраженное через $T(\xi)$ и $G(\xi)$, а также через функции $\tau(\xi)$ и $\nu(\xi)$ и их производные.

1. Уравнение, приводящееся к уравнению Эйлера-Дарбу.

Рассмотрим уравнение $$(-y)^p u_{xx}-u_{yy}+a(-y)^{\frac{p}{2}-1}u_x=0\ \ (p>0, a\in R) \tag{1}$$

В области Д, ограниченной отрезком АВ оси O_x и двумя характеристиками:

$$AC:\ \xi=x-\frac{2}{p+2}(-y)^{\frac{p+2}{2}}=0,\ \ BC:\ \eta=x+\frac{2}{p+2}(-y)^{\frac{p+2}{2}}=1. \tag{2}$$

В характеристических координатах ξ и η уравнение (1) переходит в уравнение Эйлера-Дарбу

$$U_{\xi\eta}-\frac{\alpha}{\eta-\xi}U_{\eta}+\frac{\beta}{\eta-\xi}U_{\xi}=0, \tag{3}$$

где $\alpha=\dfrac{p-2a}{2(p+2)}$, $\beta=\dfrac{p+2a}{2(p+2)}$, $0<\alpha+\beta=\dfrac{p}{p+2}<1$.

Возможны следующие случаи:

1. $a<-\dfrac{p}{2}$, тогда $\alpha>0$, $\beta<0$;
2. $a>\dfrac{p}{2}$, тогда $\alpha<0$, $\beta>0$;
3. $-\dfrac{p}{2}<a<\dfrac{p}{2}$, тогда $\alpha>0$ и $\beta>0$, причем $0<\alpha+\beta<1$.

В частности при $a=0$ $\alpha=\beta$ и $0<\beta<\dfrac{1}{2}$; при $a=\dfrac{p}{2}$ – $0<\alpha=\dfrac{p}{p+2}<1$ и $\beta=0$; при $a=\dfrac{p}{2}$ $\alpha=0$ и $0<\beta=\dfrac{p}{p+2}<1$.

Вообще, при $-\dfrac{p}{2}\le a\le\dfrac{p}{2}$ мы имеем классический случай, для которого решение задачи Коши известно.

2. Построение обобщенного решения.

Построим обобщенное решение уравнения (3) для случая $a<-\dfrac{p}{2}$, т. е. при $\alpha>0$ и $\beta<0$, используя два основных свойства уравнения Эйлера-Дарбу.

1. Если ввести новую функцию, полагая

$$U(\xi,\eta)=(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}V(\xi,\eta), \tag{4}$$

то уравнение (3) перейдет в уравнение

$$V_{\xi\eta}-\frac{1-\beta}{\eta-\xi}V_{\eta}+\frac{1-\alpha}{\eta-\xi}V_{\xi}=0 \tag{5}$$

Если через Z (α, β) обозначить любое решение уравнения (3), то в силу (5)

$$Z(\alpha,\beta)=(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}Z(1-\beta,1-\alpha) \tag{6}$$

2. Если Z(α, β) – любое решение уравнения (3), то

$$\frac{\partial Z(\alpha,\beta)}{\partial \xi} = Z(1+\alpha,\beta) \text{ и } \frac{\partial Z(\alpha,\beta)}{\partial \eta} = Z(\alpha,1+\beta) \tag{7}$$

Используя формулы (6) и (7), можно записать

$$Z(\alpha,\beta) = \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} Z(\alpha-m,\beta) = \frac{\partial^m}{\partial \xi^m}(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta+m} Z(1-\beta,1-\alpha+m) = \frac{\partial^m}{\partial \xi^m}(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta+m}\frac{\partial^n}{\partial \xi^n} Z(1-\beta-n,1-\alpha+m), \tag{8}$$

где $Z(1-\beta-n,1-\alpha+m) = x_1(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+n-m-1}\int_0 \Phi(\xi+(\eta-\xi)t)t^{n+\beta-1}(1-t)^{\alpha-m-1}dt + x_2\int_0 \Psi(\xi+(\eta-\xi)t)t^{-\alpha+m}\cdot$

$$\cdot(1-t)^{-\beta-n}dt = x_1 I_1 + x_2 I_2 \tag{9}$$

(здесь 0<α-m<1, 0<β+n<1, m,n$\in$ N).

Преобразуем I$_1$, представив функцию Ф(z) в виде оператора дробного порядка интегрирования

$$\Phi(z) = \Gamma(l+1)Д_{oz}^{-(l+1)}T(z) = \int_0^z T(t)(z-t)^l dt \tag{10}$$

С учетом (10) I$_1$ примет вид: $I_1 = \int_\xi^\eta (z-\xi)^{n+\beta-1}(\eta-z)^{\alpha-m-1}dz\int_0^z T(t)(z-t)^l dt$.

Изменим порядок интегрирования

$$I_1 = \int_0^\xi T(t)dt\int_\xi^\eta (z-\xi)^{n+\beta-1}(\eta-z)^{\alpha-m-1}(z-t)^l dz + \int_\xi^\eta T(t)dt\int_t^\eta (z-\xi)^{n+\beta-1}(\eta-z)^{\alpha-m-1}(z-t)^l dz.$$

Во внутренних интегралах сделаем замену переменных соответственно по формулам $z=\eta-(\eta-\xi)\lambda$ и $z=\eta-(\eta-t)\lambda$.

$$I_1 = (\eta-\xi)^{-1+\alpha+\beta-m+n}\int_0^\xi T(t)(\eta-t)^l dt\int_0^1 \lambda^{\alpha-m-1}(1-\lambda)^{n+\beta-1}\left(1-\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\lambda\right)^l d\lambda +$$

$$+(\eta-\xi)^{\beta+n-1}\int_\xi^\eta T(t)(\eta-t)^{\alpha+l-m}dt\int_0^1 \lambda^{\alpha-m-1}(1-\lambda)^l\left(1-\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\lambda\right)^{\beta+n-1}d\lambda =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta-m+n)}(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+n-m+l}\int_0^\xi T(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{-l}F\left(-l,\alpha-m;\alpha-m+\beta+n;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt +$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(l+1)}{\Gamma(\alpha+l-m+1)}(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+n-m+l-1}\int_\xi^\eta T(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+l-m}F\left(1-\beta-n,\alpha-m;\alpha-m+l+1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt$$

От I_1 находим частную производную по ξ

$$\frac{\partial I_1}{\partial \xi} = -\frac{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta-m+n-1)}(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+n-m+l-2}\int_0^\xi T(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{-l}\cdot F\left(-l,\alpha-m;\alpha+\beta-m+n-1;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt +$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(l+1)}{\Gamma(\alpha+l-m+1)}(1-n-\beta)(\eta-\xi)^{\alpha+\beta-m+n+l-2}\int_\xi^\eta T(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+l-m}F\left(2-\beta-n,\alpha-m;\alpha-m+l+1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt.$$

Вообще, $\frac{\partial^n I_1}{\partial \xi^n} = (-1)^n\cdot\frac{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta-m)}(\eta-\xi)^{\alpha+\beta-m+l-1}\int_0^\xi T(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{-l}\cdot F\left(-l,\alpha-m;\alpha-m+\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt +$

$$+\frac{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(l+1)}{\Gamma(\alpha+l-m+1)}(\eta-\xi)^{\alpha+\beta-m+l-1}\cdot(1-n-\beta)(2-n-\beta)\cdot\ldots\cdot(-\beta)\int_\xi^\eta T(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha-m+l}\cdot$$

$$\cdot F\left(1-\beta,\alpha-m;\alpha-m+l-1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt\ . \tag{12}$$

Обозначим
$$I_1^* = (\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta+m}\frac{\partial^n I_1}{\partial\xi^n} \tag{13}$$

и найдем $\frac{\partial I_1^*}{\partial\xi} = (-1)^n\frac{\Gamma(\alpha-m+1)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta-m+1)}\cdot l(\eta-\xi)^{l-1}\int\limits_0^\xi T(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{1-l}\cdot F\left(1-l,\alpha-m+1;\alpha-m+\beta+1;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt+$

$$+\frac{\Gamma(\alpha-m+1)\Gamma(l+1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha+l-m+1)\Gamma(1-\beta-n)}(\eta-\xi)^{l-1}\cdot\int\limits_\xi^\eta T(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+l-m}\cdot F\left(1-\beta,\alpha-m+1;\alpha-m+l+1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt$$

Вообще, $\frac{\partial^m I_1^*}{\partial\xi^m} = (-1)^n\cdot\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l-m+1)}\cdot(\eta-\xi)^{l-m}\int\limits_0^\xi T(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{m-l}\cdot F\left(m-l,\alpha;\alpha+\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt+$

$$+\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(l+1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha+l-m+1)\Gamma(1-n-\beta)}(\eta-\xi)^{l-m}\cdot\int\limits_\xi^\eta T(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha-m+l}F\left(1-\beta,\alpha;\alpha-m+l+1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt \tag{14}$$

$$(\,l>m-\beta\,)$$

Учитывая, что $\frac{\partial^n I_2}{\partial\xi^n} = \frac{\partial^n}{\partial\xi^n}\int\limits_0^1\Psi(\xi+(\eta-\xi)t)t^{m-\alpha}(1-t)^{-\beta-n}dt = \int\limits_0^1\Psi^*(\xi+(\eta-\xi)t)t^{m-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt$, найдем

$I_2^* = (\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta+m}\frac{\partial^n I_2}{\partial\xi^n} = \int\limits_\xi^\eta\Psi^*(t)(t-\xi)^{m-\alpha}(\eta-t)^{-\beta}dt$, полагая $\Psi^*(t) = \int\limits_0^t G(z)(t-z)^\delta dz$.

Подставляя в I_2^* выражение для $\Psi^*(t)$ и изменяя порядок интегрирования, получим

$$I_2^* = \int\limits_0^\xi G(t)dt\int\limits_\xi^\eta(z-t)^\delta(z-\xi)^{m-\alpha}(\eta-z)^{-\beta}dz+\int\limits_\xi^\eta G(t)dt\int\limits_t^\eta(z-t)^\delta(z-\xi)^{m-\alpha}(\eta-z)^{-\beta}dz=$$

$$=(\eta-\xi)^{m-\alpha-\beta+1}\int\limits_0^\xi G(t)(\eta-t)^\delta dt\int\limits_0^1\lambda^{-\beta}(1-\lambda)^{m-\alpha}\left(1-\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\lambda\right)^\delta d\lambda+$$

$$+(\eta-\xi)^{m-\alpha}\int\limits_\xi^\mu G(t)(\eta-t)^{\delta+1-\beta}dt\int\limits_0^1\lambda^{-\beta}(1-\lambda)^\delta\left(1-\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\lambda\right)^{m-\alpha}d\lambda=$$

$$=\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+m-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha-\beta+m)}(\eta-\xi)^{m-\alpha-\beta+1+\delta}\int\limits_0^\xi G(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{-\delta}F\left(-\delta,1-\beta;2+m-\alpha-\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt+$$

$$+\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(2-\beta+\delta)}(\eta-\xi)^{1+m-\alpha-\beta+\delta}\int\limits_\xi^\eta G(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{1+\delta-\beta}F\left(\alpha-m,1-\beta;2-\beta+\delta;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt\ .$$

Найдем частную производную

$$\frac{\partial I_2^*}{\partial\xi} = -\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+m-\alpha)}{\Gamma(1+m-\alpha-\beta)}(\eta-\xi)^{m-\alpha-\beta+\delta}\int\limits_0^\xi G(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{-\delta}F\left(-\delta,1-\beta;1+m-\alpha-\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt+$$

$$+\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(2-\beta+\delta)}(\alpha-m)(\eta-\xi)^{m-\alpha-\beta+\delta}\int\limits_\xi^\eta G(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^\beta F\left(1+\alpha-m,1-\beta;2-\beta+\delta;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt.$$

Сравнивая I_2^* и $\dfrac{\partial I_2^*}{\partial \xi}$, можно сделать заключение, что

$$\frac{\partial^m I_2^*}{\partial \xi^m} = (-1)^m \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+m-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta+\delta}\int_0^\xi G(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{-\delta} F\left(-\delta,1-\beta;2-\alpha-\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt +$$

$$+\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\delta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2-\beta+\delta)\Gamma(\alpha-m)}(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta+\delta}\int_\xi^\eta G(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{1+\delta-\beta} F\left(\alpha,1-\beta;2-\beta+\delta;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt \qquad (15)$$

$$(\delta>\alpha-1)$$

Подставим (14) и (15) в (8). Тогда с учетом (9) получим обобщенное решение уравнения (3)

$$U(\xi,\eta) = (\eta-\xi)^{l-m}\int_0^\xi T(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{m-l} F\left(m-l,\alpha;\alpha+\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt +$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(l-m+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-l-m+\alpha)}(\eta-\xi)^{l-m}\int_\xi^\eta T(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha-m+l} F\left(1-\beta,\alpha;\alpha-m+l+1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt +$$

$$+(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta+\delta}\int_0^\xi G(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{-\delta} F\left(-\delta,1-\beta;2-\alpha-\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt +$$

$$+\frac{\Gamma(1+\delta)\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(2-\beta+\delta)\Gamma(1-\alpha)}(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta+\delta}\int_\xi^\eta G(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{1+\delta-\beta} F\left(\alpha,1-\beta;2-\beta+\delta;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt, \qquad (16)$$

где постоянные x_1 и x_2 выбраны следующим образом

$$x_1 = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(l-m+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+n)\Gamma(l+1)},\quad x_2 = (-1)^m \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+m-\alpha)},$$

причем использованы формулы $(-1)^n \dfrac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-n-\beta)\Gamma(\beta+n)} = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}$ и $(-1)^m \dfrac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(1+m-\alpha)} = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$.

Задача. В области Д$_1$ ограниченной линиями $\xi=0, \eta=1, \eta=\xi$ найти решение $U(\xi,\eta)\in C^n(\overline{Д})\cap C^{(n+1)}(Д\cup I)$ уравнения (3), удовлетворяющее краевым условиям

$$U(\xi,\xi) = \tau(\xi) = \int_0^\xi T(t)(\xi-t)^\mu dt \quad (\mu = l-m>\beta) - \qquad (17)$$

$$\lim_{\eta\to\xi}\frac{1}{2(1-\alpha-\beta)}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}-\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)(\eta-\xi)^{\alpha+\beta} = \nu(\xi) = \int_0^\xi G(t)(\xi-t)^\delta dt \quad (\delta>\alpha-1) \qquad (18)$$

Учитывая, что $\dfrac{1}{2(1-\alpha-\beta)}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \eta}-\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\right)(\eta-\xi)^{\alpha+\beta} = \dfrac{(l-m)(\eta-\xi)^{\alpha+\beta}}{2(1-\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\displaystyle\int_0^\xi T(t)(\eta-t)^{l-m+1}\cdot$

$$\cdot\left[\beta\cdot F\left(m-l+1,\alpha;\alpha+\beta+1;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)-\alpha\cdot F\left(m-l+1,\alpha+1;\alpha+\beta+1;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)\right]dt +$$

$$+\frac{\Gamma(l-m+1)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+l-m+1)}\cdot\frac{(\eta-\xi)^\beta}{2(1-\alpha-\beta)}\int_\xi^\eta T(t)(\eta-t)^{\alpha-m+l-1}\cdot$$

$$\cdot\left[(\alpha+l-m)F\left(-\beta,\alpha;\alpha-m+l;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)-\alpha\frac{\eta-t}{\eta-\xi}F\left(1-\beta,\alpha+1;\alpha-m+l+1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)\right]dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\xi G(t)(\eta-t)^\delta\left[F\left(-\delta,-\beta;1-\alpha-\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)+F\left(-\delta,1-\beta;1-\alpha-\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)\right]dt + \frac{\Gamma(1+\delta)\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(2-\beta+\delta)}\cdot$$

$$\cdot(\eta-\xi)^{\beta}\int\limits_{\xi}^{\eta}G(t)(\eta-t)^{\delta-\beta}\left[(1-\beta+\beta)F\left(\alpha,-\beta;1-\beta+\delta;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)-\alpha\frac{\eta-t}{\eta-\xi}F\left(1+\alpha,1-\beta;2-\beta+\delta;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)\right]dt$$

легко показать, что обобщенное решение уравнения (3), найденное по формуле (16) удовлетворяет краевым условиям (17) и (18).

Запишем решение задачи через функции $\tau(\xi)$ и $\nu(\xi)$. Интегралы, входящие в краевые условия (17) и (18), можно записать в виде операторов дробного порядка интегрирования

$$\tau(\xi)=\Gamma(\mu+1)Д_{0\xi}^{-(\mu+1)}T(\xi),\;\; \nu(\xi)=\Gamma(\delta+1)Д_{0\xi}^{-(\delta+1)}G(\xi).$$

Отсюда, $$T(\xi)=\frac{1}{\Gamma(\mu+1)}Д_{0\xi}^{\mu+1}\tau(\xi),\quad G(\xi)=\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}Д_{0\xi}^{\delta+1}\nu(\xi) \qquad (19).$$

Введем понятие производной Лиувилля дробного порядка a>0. Пусть $n-1<a\leq n$, тогда функция

$Д_{0x}^{a}f(x)=\frac{d^n}{dx^n}Д_{0x}^{a-n}f(x)$ называется производной дробного порядка a>0 от функции $f(x)$.

Так как $0<\beta+n<1$, то $-\beta\in(n-1,n)$. В силу того что $\mu>-\beta$, $\mu+1$ можно выбрать из промежутка $(1-\beta,n+1)$, тогда $(\mu+1)-(n+1)<0$ и, следовательно,

$$T(\xi)=\frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}Д_{0\xi}^{\mu+1-(n+1)}\tau(\xi)=\frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\cdot\frac{1}{\Gamma(n-\mu)}\cdot\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}\int\limits_{0}^{\xi}\tau(z)(\xi-z)^{n-\mu-1}dz \qquad (20)$$

В силу связки $0<\alpha+\beta<1$ и $\beta\in(n-1,n)$ – параметр α может принадлежать одному из промежутков $(-\beta,n)$ или $(n,1-\beta)$. Так как $\delta+1>\alpha$, то $\delta+1$ также можно выбрать из следующих условий $\alpha<\delta+1<n$ или $n<\alpha<\delta+1<1-\beta$, тогда $\delta+1-n<0$, если $\alpha\in(-\beta,n)$ и $\delta+1-(n+1)<0$, если $\alpha\in(n,1-\beta)$.

В общем виде для $G(\xi)$ будем пользоваться производной $k+1$-го порядка, заменив в конечном ответе для $U(\xi,\eta)$ k на n, т если $\alpha\in(n,1-\beta)$ и k на $n-1$, если $\alpha\in(-\beta,n)$, т. е.

$$G(\xi)=\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}}Д_{0\xi}^{\delta+1-(k+1)}\nu(\xi)=\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\cdot\frac{1}{\Gamma(k-\delta)}\frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}}\int\limits_{0}^{\xi}\nu(z)(\xi-z)^{k-\delta-1}dz \qquad (21)$$

С учетом (20) и (21) решение, найденное по формуле (16) можно записать в виде

$$U(\xi,\eta)=\frac{(\eta-\xi)^{\mu}}{\Gamma(1+\mu)\Gamma(n-\mu)}\int\limits_{0}^{\xi}\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{-\mu}F\left(-\mu,\alpha;\alpha+\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt\cdot\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\int\limits_{0}^{t}\tau(z)(t-z)^{n-\mu-1}dz+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)(\eta-\xi)^{\mu}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\mu+\alpha+1)\Gamma(n-\mu)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+\mu}F\left(1-\beta,\alpha;\alpha+\mu+1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\int\limits_{0}^{t}\tau(z)(t-z)^{n-\mu-1}dz+$$

$$+\frac{(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta+\delta}}{\Gamma(1+\delta)\Gamma(m-\delta)}\int\limits_{0}^{\xi}\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{-\delta}F\left(-\delta,1-\beta;2-\alpha-\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\int\limits_{0}^{t}\nu(z)(t-z)^{k-\delta-1}dz+$$

$$+\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta+\delta}}{\Gamma(2-\beta+\delta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k-\delta)}\cdot\int\limits_{\xi}^{\eta}\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{1+\delta-\beta}F\left(\alpha,1-\beta;2-\beta+\delta;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\int\limits_{0}^{t}\nu(z)(t-z)^{k-\delta-1}dz \qquad (22)$$

Применяя метод интегрирования по частям, а затем изменяя порядок интегрирования, (22) преобразуем к виду

$$U(\xi,\eta)=\frac{(\eta-\xi)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)\Gamma(n-\mu)}\int\limits_{0}^{\xi}\tau^{(n)}(z)dz\int\limits_{z}^{\xi}\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{1-\mu}(t-z)^{n-\mu-1}F\left(1-\mu,\alpha;\alpha+\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)(\eta-\xi)^{\mu-1}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\mu+\alpha)\Gamma(n-\mu)}\int\limits_{0}^{\xi}\tau^{(n)}(z)dz\int\limits_{\xi}^{\eta}\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+\mu-1}(t-z)^{n-\mu-1}F\left(1-\beta,\alpha;\alpha+\mu;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)(\eta-\xi)^{\mu-1}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\mu+\alpha)\Gamma(n-\mu)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\tau^{(n)}(z)dz\int\limits_{z}^{\eta}\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+\mu-1}(t-z)^{n-\mu-1}F\left(1-\beta,\alpha+\mu;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt+$$

$$+\frac{(\eta-\xi)^{\delta-\alpha-\beta}}{\Gamma(\delta)\Gamma(k-\delta)}\int_0^{\xi}\nu^{(k)}(z)dz\int_z^{\xi}\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{1-\delta}(t-z)^{k-\delta-1}F\left(1-\delta,1-\beta;2-\alpha-\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt+$$

$$+\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)(\eta-\xi)^{\delta-\alpha-\beta}}{\Gamma(1-\beta+\delta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k-\delta)}\int_0^{\xi}\nu^{(k)}(z)dz\int_{\xi}^{\eta}\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\delta-\beta}(t-z)^{k-\delta-1}F\left(\alpha,1-\beta;1+\delta-\beta;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt+$$

$$+\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)(\eta-\xi)^{\delta-\alpha-\beta}}{\Gamma(1-\beta+\delta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k-\delta)}\int_{\xi}^{\eta}\nu^{(k)}(z)dz\int_z^{\eta}\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\delta-\beta}(t-z)^{k-\delta-1}F\left(\alpha,1-\beta;1+\delta-\beta;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt\ . \qquad (23)$$

Выполним в трех первых и в трех последних интегралах замену переменных по формулам $\xi-(\xi-z)\lambda=t$, $\eta-(\eta-\xi)\lambda=t$ и $\eta-(\eta-z)\lambda=t$.

Обозначим внутренние интегралы формулы (23) соответственно $I_1^{**}(\xi,\eta,z), I_2^{**}(\xi,\eta,z),\dots,I_6^{**}(\xi,\eta,z)$, а каждое из слагаемых $U_1(\xi,\eta), U_2(\xi,\eta),\dots,U_6(\xi,\eta)$.

После ряда несложных преобразований $I_1^{**}(\xi,\eta,z)$ примет вид

$$I_1^{**}(\xi,\eta,z)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\mu+\beta-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\mu-1)}(\xi-z)^{n-\mu}\frac{\Gamma(n-\mu)}{\Gamma(n-\mu+1)}{}_3F_2\left(1,1-\mu,2-\alpha-\beta;n-\mu+1,2-\beta-\mu;\frac{z-\xi}{\eta-\xi}\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\mu-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\mu)}\cdot\frac{\Gamma(n-\mu)\Gamma(\beta+\mu)}{\Gamma(\beta+n)}(\xi-z)^{n+\beta-1}(\eta-\xi)^{1-\beta-\mu}F\left(\beta,1-\alpha;n+\beta;\frac{z-\xi}{\eta-\xi}\right). \qquad (24)$$

Внутренний интеграл второго слагаемого

$$I_2^{**}(\xi,\eta,z)=\frac{\Gamma(\alpha+\mu)\Gamma(\beta+\mu)}{\Gamma(\alpha+\beta+\mu)\Gamma(\mu+1)}(\eta-\xi)(\xi-z)^{n-\mu-1}{}_3F_2\left(1,\mu-n+1,\mu+\beta;\mu+\alpha+\beta,\mu+1;\frac{\eta-\xi}{z-\xi}\right) \qquad (25)$$

Используя формулу перехода в обобщенной гипергеометрической функции от аргумента z к $\frac{1}{z}$, получим

$${}_3F_2\left(1,\mu-n+1,\mu+\beta;\mu+\alpha+\beta,\mu+1;\frac{\eta-\xi}{z-\xi}\right)=\frac{\Gamma(\mu+\alpha+\beta)\Gamma(\mu+\beta-1)}{\Gamma(\mu-n+1)\Gamma(\mu+\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu-n)}{\Gamma(\mu+\alpha+\beta-1)\Gamma(\mu)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\xi-z}{\eta-\xi}{}_3F_2\left(1,2-\alpha-\beta-\mu,1-\mu;1+n-\mu,2-\beta-\mu;\frac{z-\xi}{\eta-\xi}\right)+\frac{\Gamma(\mu+\alpha+\beta)\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+n)\Gamma(\beta+n-1)}{\Gamma(\beta+\mu)\Gamma(\alpha+\beta+n-1)\Gamma(n)}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\xi-z}{\eta-\xi}\right)^{\mu-n+1}{}_3F_2\left(\mu-n+1,2-\alpha-\beta-n,1-n;\mu-n+1,2-n-\beta;\frac{z-\xi}{\eta-\xi}\right)+\frac{\Gamma(\mu+\alpha+\beta)\Gamma(\mu+1)\Gamma(1-\beta-\mu)}{\Gamma(\mu-n+1)\Gamma(\alpha)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\Gamma(1-\beta-n)}{\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{\xi-z}{\eta-\xi}\right)^{\beta+\mu}{}_3F_2\left(\mu+\beta,1-\alpha,\beta;\mu+\beta;\beta+n;\frac{z-\xi}{\eta-\xi}\right)=\frac{\Gamma(\mu+\alpha+\beta)\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu-n)\Gamma(\mu+\beta-1)}{\Gamma(\mu-n+1)\Gamma(\mu+\beta)\Gamma(\mu+\alpha+\beta-1)\Gamma(\mu)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\xi-z}{\eta-\xi}{}_3F_2\left(1,2-\alpha-\beta,1-\mu;1+n-\mu,2-\beta-\mu;\frac{z-\xi}{\eta-\xi}\right)+\frac{\Gamma(\mu+\alpha+\beta)\Gamma(\mu+1)\Gamma(n-\mu)\Gamma(\beta+n-1)}{\Gamma(\beta+\mu)\Gamma(\alpha+\beta+n-1)\Gamma(n)}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\xi-z}{\eta-\xi}\right)^{\mu-n+1}F\left(2-n-\alpha-\beta,1-n;2-\beta-n;\frac{z-\xi}{\eta-\xi}\right)+\frac{\Gamma(\mu+\alpha+\beta)\Gamma(\mu+1)\Gamma(1-\beta-n)\Gamma(1-\beta-n)}{\Gamma(\mu-n+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\xi-z}{\eta-\xi}\right)^{\mu+\beta}F\left(1-\alpha,\beta;\beta+n;\frac{z-\xi}{\eta-\xi}\right) \qquad (26)$$

С учетом (24), (25) и (26) сумма двух первых слагаемых формулы (23) примет вид

$$U_1(\xi,\eta)+U_2(\xi,\eta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta+n-1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n-1)\Gamma(\beta)\Gamma(n)}(\eta-\xi)^{n-1}\int_0^{\xi}\tau^{(n)}(z)F\left(2-\alpha-\beta-n,1-n;2-\beta-n;\frac{z-\xi}{\eta-\xi}\right)dz\,.$$

Применяя n раз метод интегрирования по частям, получим

$$U_1(\xi,\eta)+U_2(\xi,\eta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta+n-1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n-1)\Gamma(\beta)(n-1)!}(\eta-\xi)^{n-1}\tau^{(n-1)}(\xi)+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(n+\beta-2)}{\Gamma(\alpha+\beta+n-2)\Gamma(\beta)}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\eta-\xi)^{n-2}}{(n-2)!}\tau^{(n-2)}(\xi)+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta+n-3)}{\Gamma(\alpha+\beta+n-3)\Gamma(\beta)}\frac{(\eta-\xi)^{n-3}}{(n-3)!}\tau^{(n-3)}(\xi)+\ldots+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\beta)}\frac{\eta-\xi}{1!}\tau'(\xi)+\tau(\xi) \qquad (27)$$

(здесь без ограничения общности положим $\tau^{(m-1)}(0)=\tau^{(m-2)}(0)=\ldots=\tau'(0)=\tau(0)=0$)

Рассмотрим третье слагаемое формулы (23)

$$U_3(\xi,\eta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)(\eta-\xi)^{n-1}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+n)}\int_\xi^\eta\tau^{(n)}(z)\left(\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+n-1}F\left(1-\beta,\alpha;\alpha+n;\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)dz \qquad (28)$$

Применяя формулу $\gamma F(\alpha,\beta;\gamma,z)-\gamma F(\alpha,\beta+1;\gamma;z)+\alpha zF(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z)=0$ и свойство числа сочетаний $C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m$, методом полной математической индукции можно доказать, что

$$\left(\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)^n F\left(1-\beta,\alpha;\alpha+n;\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)=\frac{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\cdot\ldots\cdot\alpha}{\beta(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+n-1)}\cdot$$

$$\cdot\left[F\left(1-\beta-n,\alpha-n;\alpha;\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)-C_n^1F\left(1-\beta-n,\alpha-n+1;\alpha;\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)+C_n^2F\left(1-\beta-n,\alpha-n+2;\alpha;\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^rC_n^rF\left(1-\beta-n,\alpha-n+r;\alpha;\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)+\ldots+(-1)^nF\left(1-\beta-n,\alpha;\alpha;\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)\right] \qquad (29)$$

где $\dfrac{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\cdot\ldots\cdot\alpha}{\beta(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+n-1)}=\dfrac{\Gamma(\alpha+n)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n)\cdot\Gamma(\alpha)}$.

Подставляя (29) в (28), получим

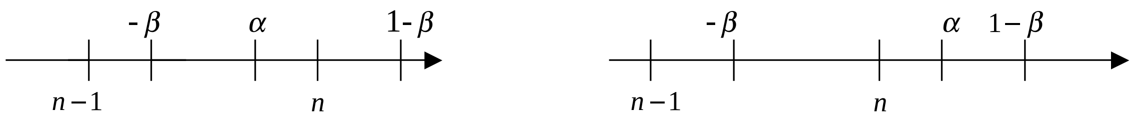
$$U_3(\xi,\eta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha)}(\eta-\xi)^{n-1}\int_\xi^\eta\tau^{(n)}(z)\left(\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)^{\alpha-1}\left[F\left(1-\beta-n,\alpha-n;\alpha;\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)-\right.$$

$$-C_n^1F\left(1-\beta-n,\alpha-n+1;\alpha;\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)+C_n^2F\left(1-\beta-n,\alpha-n+2;\alpha;\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)-\ldots+$$

$$+(-1)^rC_n^rF\left(1-\beta-n,\alpha-n+r;\alpha;\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)+..+(-1)^{n-1}C_n^1F\left(1-\beta-n,\alpha-1;\alpha;\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)+$$

$$\left.+(-1)^nF\left(1-\beta-n,\alpha;\alpha;\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)\right]dz \qquad (30)$$

Как уже отмечалось расположение точек на числовой прямой может быть следующим



При первом расположении точек -1<$\alpha-n$<0, при втором – 0<$\alpha-n$<1.

1.Если 0<$\alpha-n$<1, то к первым интегралам формулы (30) можно применить метод интегрирования по частям соответственно к первому слагаемому n раз, ко второму $n-1$ раз и т. д. к n-му слагаемому 1 раз, причем последнее слагаемое

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha)}(\eta-\xi)^{n-1}(-1)^n\int_\xi^\eta\tau^{(n)}(z)\left(\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)^{\alpha-1}F\left(1-\beta-n,\alpha;\alpha;\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)dz=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha)}(-1)^n(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}\int_\xi^\eta\tau^{(n)}(z)(z-\xi)^{n+\beta-1}(\eta-z)^{\alpha-1}dz$$

С учетом выше сказанного $U_3(\xi,\eta)$ примет вид

$$U_3(\xi,\eta)=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta)(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha)}\int_\xi^\eta\tau^{(n)}(z)(\eta-z)^{\alpha-1}(z-\xi)^{\beta+n-1}dz+$$

$$+(-1)^{n-1}C_n^1\frac{\Gamma(\alpha+\beta)(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha-1)}\int_\xi^\eta\tau^{(n-1)}(z)(\eta-z)^{\alpha-2}(z-\xi)^{\beta+n-1}dz+$$

$$+(-1)^{n-2}C_n^2\frac{\Gamma(\alpha+\beta)(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha-2)}\int_\xi^\eta\tau^{(n-2)}(z)(\eta-z)^{\alpha-3}(z-\xi)^{\beta+n-1}dz+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha-n)}\int_\xi^\eta\tau(z)(\eta-z)^{\alpha-n-1}(z-\xi)^{\beta+n-1}dz-\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta+n-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+n-1)\Gamma(n)}(\eta-\xi)^{n-1}\tau^{(n-1)}(\xi)-$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta+n-2)(\eta-\xi)^{n-2}}{\Gamma(n-1)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+n-2)}\tau^{(n-2)}(\xi)-\ldots-\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta+1)(\eta-\xi)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(2)}\tau'(\xi)-\tau(\xi) \tag{31}$$

Складывая (27) и (31), получим

$$U_1(\xi,\eta)+U_2(\xi,\eta)+U_3(\xi,\eta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha-n)}\int_\xi^\eta\tau(z)(\eta-z)^{\alpha-n-1}(z-\xi)^{\beta+n-1}dz-$$

$$-C_n^1\frac{\Gamma(\alpha+\beta)(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha+1-n)}\int_\xi^\eta\tau'(z)(\eta-z)^{\alpha-n}(z-\xi)^{n+\beta-1}dz+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-2}C_n^2\frac{\Gamma(\alpha+\beta)(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha-2)}\int_\xi^\eta\tau^{(n-2)}(z)(\eta-z)^{\alpha-3}(z-\xi)^{\beta+n-1}dz+$$

$$+(-1)^{n-1}C_n^1\frac{\Gamma(\alpha+\beta)(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha-1)}\int_\xi^\eta\tau^{(n-1)}(z)(\eta-z)^{\alpha-2}(z-\xi)^{n+\beta-1}dz+$$

$$+(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta)(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha)}\int_\xi^\eta\tau^{(n)}(z)(\eta-z)^{\alpha-1}(z-\xi)^{\beta+n-1}dz \tag{32}$$

Проводя подобные рассуждения можно показать, что

$$U_4(\xi,\eta)+U_5(\xi,\eta)+U_6(\xi,\eta)=(-1)^n\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1+n-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\int_\xi^\eta\nu^{(n)}(z)(\eta-z)^{-\beta}(z-\xi)^{n-\alpha}dz+$$

$$+(-1)^{n-1}C_n^1\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1+n-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_\xi^\eta\nu^{(n-1)}(z)(\eta-z)^{-\beta-1}(z-\xi)^{n-\alpha}dz+$$

$$+(-1)^{n-2}C_n^2\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1+n-\alpha)\Gamma(-\beta-1)}\int_\xi^\eta\nu^{(n-2)}(z)(\eta-z)^{-\beta-2}(z-\xi)^{n-\alpha}dz+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1+n-\alpha)\Gamma(1-\beta-n)}\int_\xi^\eta\nu(z)(\eta-z)^{-\beta-n}(z-\xi)^{n-\alpha}dz \tag{33}$$

Подставляя (32) и (33) в (23) получим решение задачи Коши, выраженное через функции $\nu(\xi)$ и $\tau(\xi)$

$$U(\xi,\eta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha-n)}(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}\int_\xi^\eta\tau(z)(\eta-z)^{\alpha-n-1}(z-\xi)^{\beta+n-1}dz-$$

$$-C_n^1\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha+1-n)}(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}\int_\xi^\eta\tau'(z)(\eta-z)^{\alpha-n}(z-\xi)^{\beta+n-1}dz+\ldots$$

$$
\ldots+(-1)^{n-2}C_n^2\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha-2)}(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}\int_\xi^\eta \tau^{(n-2)}(z)(\eta-z)^{\alpha-3}(z-\xi)^{\beta+n-1}dz+
$$

$$
+(-1)^{n-1}C_n^1\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha-1)}(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}\int_\xi^\eta \tau^{(n-1)}(z)(\eta-z)^{\alpha-2}(z-\xi)^{\beta+n-1}dz+
$$

$$
+(-1)^{n}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha)}(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}\int_\xi^\eta \tau^{(n)}(z)(\eta-z)^{\alpha-1}(z-\xi)^{\beta+n-1}dz+
$$

$$
+\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1+n-\alpha)\Gamma(1-\beta-n)}\int_\xi^\eta \nu(z)(\eta-z)^{-\beta-n}(z-\xi)^{n-\alpha}dz-
$$

$$
-C_n^1\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1+n-\alpha)\Gamma(2-\beta-n)}\int_\xi^\eta \nu'(z)(\eta-z)^{-\beta+n+1}(z-\xi)^{n-\alpha}dz+\ldots
$$

$$
\ldots+(-1)^{n-1}C_n^1\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1+n-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_\xi^\eta \nu^{(n-1)}(z)(\eta-z)^{-\beta-1}(z-\xi)^{n-\alpha}dz+
$$

$$
+(-1)^{n}\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1+n-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\int_\xi^\eta \nu^{n}(z)(\eta-z)^{-\beta}(z-\xi)^{n-\alpha}dz \qquad (34)
$$

Аналогично рассматривается случай, когда -1< $\alpha-n$ <0.

Список использованной литературы:

1. Смирнов М.М. Уравнение смешанного типа. Учеб. пособие для матем. спец. ун-тов. – М.: Высш. шк., 1985. – 304 с., ил.
2. Градштейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962, – 1100 с., ил.