В.Н. Тарасов

# К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА

**В статье рассмотрены вопросы существования и единственности решения краевой задачи уравнения Колмогорова, часто используемого в прикладных задачах. Для этого приведено конструктивное определение векторного диффузионного процесса.**

В технологии математического моделирования при вычислении внутренних величин по внешним величинам модели возникает вопрос о том, определяют ли однозначно математические соотношения эти внутренние величины и вообще, возможно ли их определить? Иногда этот вопрос может быть только интуитивно очевидным из-за физического смысла используемых математических соотношений, и он представляет собой существование и единственность решения некоторой математической задачи.

Рассмотрим конструктивное определение векторного диффузионного процесса $\boldsymbol{x}(\mathrm{t})$, состоящего в предельном переходе от стохастического разностного уравнения к стохастическому дифференциальному по аналогии с обыкновенным дифференциальным уравнением. Для этого рассмотрим разностное стохастическое уравнение

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{k}+1} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{k}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{k}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{k}})\Delta t + \boldsymbol{B}_{\mathrm{k}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{k}})\xi_{\mathrm{k}} \qquad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{A}_{\mathrm{k}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{k}})$ – вектор-функция, $\boldsymbol{B}_{\mathrm{k}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{k}})$ – матрица, $\xi_{\mathrm{k}}$ векторная последовательность с нулевым вектором математических ожиданий и единичной матрицей вторых моментов. Дисперсия второго слагаемого в (1) определяется корреляционной матрицей $\boldsymbol{B}_{\mathrm{k}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{k}})\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{k}})$. Ее диагональные элементы равны дисперсиям компонент вектора $\boldsymbol{B}_{\mathrm{k}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{k}})\xi_{\mathrm{k}}$.

Предельное решение уравнения (1) есть стохастический процесс $\boldsymbol{x}(\mathrm{t})$, и оно существует только при условии $\lim\limits_{\Delta t \to \infty} \boldsymbol{B}_{\mathrm{k}}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{k}})\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{k}}) = \boldsymbol{D}(\mathrm{t}, \boldsymbol{x})\Delta\mathrm{t}$. Тогда уравнение (1) в пределе при $\Delta t \to 0$ можно переписать в виде:

$$d\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x})dt + \boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{x})\sqrt{dt}\,\xi_t, \qquad (2)$$

где $\xi_t$ – случайная векторная величина с нулевым вектором математических ожиданий и единичной матрицей вторых моментов $\boldsymbol{D}(\mathrm{t}, \boldsymbol{x})$. Уравнение (2) называется стохастическим дифференциальным уравнением непрерывного марковского процесса диффузионного типа, где $\xi_t / \sqrt{dt}$ – процесс «белого» шума. Решение уравнения (2) при начальном условии $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ существует и является диффузионным процессом.

Коэффициенты стохастического уравнения (2) имеют физический смысл.

Величина $\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{M}[\Delta\boldsymbol{x}] / \Delta t$ называется вектором переноса диффузионного процесса, а $\boldsymbol{D}(t, \boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{M}\left[\Delta\boldsymbol{x}\Delta\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\right] / \Delta t$ называется матрицей диффузии. Компоненты этого вектора и матрицы называются соответственно коэффициентами переноса и дуффизии.

Обозначим через $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}, t / \boldsymbol{x}_0, t_0)$ плотность распределения ординаты диффузионного процесса, определяемого решением стохастического уравнения (2) при начальном условии $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, а через $\pi(\boldsymbol{y} / \boldsymbol{x}, dt)$ – переходную функцию плотности вероятности на интервале времени $dt$. Последняя равна условной плотности распределения величины, стоящей в правой части уравнения (2) с математическим ожиданием $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x})dt$ и матрицей вторых моментов $\boldsymbol{D}(t, \boldsymbol{x})dt$. Близость дисперсий к нулю означает близость условной плотности распределения вероятностей к обобщенной дельта-функции. Используя формулу полной вероятности получим

$$\omega(\boldsymbol{y}, t + dt) = \int \omega(\boldsymbol{x}, t)\pi(\boldsymbol{y} / \boldsymbol{x}, dt)d\boldsymbol{x}. \qquad (3)$$

Преобразуем соотношение (3), используя правила обращения с обобщенными функциями и введя произвольную функцию $\varphi(\boldsymbol{y})$, обладающей достаточным числом непрерывных производных. Умножив левую и правую части (3) на эту функцию и интегрируя по всем возможным значениям аргумента, получим:

$$\int \omega(\boldsymbol{y}, t + dt)\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \int \omega(\boldsymbol{x}, t)\int \pi\left(\boldsymbol{y}/_{\boldsymbol{x}}, dt\right)\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x}.$$

Внутренний интеграл в правой части совпадает с условным математическим ожиданием функции $\varphi(\boldsymbol{y})$. Воспользуемся приближенной формулой вычисления математического ожидания функции нескольких переменных:

$$\boldsymbol{M}[\varphi(y)]\approx\varphi(\bar{\boldsymbol{y}})+\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{m}\frac{\partial^2\varphi(\bar{\boldsymbol{y}})}{\partial y_i y_j}D_{ij}(t,\boldsymbol{x})dt. \quad (4)$$

Подставив (4) вместо внутреннего интеграла в (3) получим с точностью до слагаемых порядка малости $dt$

$$\int\omega(\boldsymbol{y},t+dt)\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\approx$$

$$\approx\int\omega(\boldsymbol{x},t)\left[\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})}{\partial x_i}\boldsymbol{A}_i(t,\boldsymbol{x})dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})}{\partial x_i\partial x_j}D_{ij}(t,\boldsymbol{x})dt\right]dx. \qquad (5)$$

Выполняя интегрирование по частям кратных интегралов и полагая функциюφ и ее производные $\partial\varphi/\partial y_i$ равными нулю на границе области интегрирования, получим уравнение

$$\int\varphi(\boldsymbol{x})\left[\frac{\partial\omega}{\partial t}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial A_i\omega}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 D_{ij}\omega}{\partial x_i\partial x_j}\right]d\boldsymbol{x}dt\approx 0 \quad (6)$$

Из этого уравнения в силу произвольности функции $\varphi(x)$ получим уравнение

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial A_i\omega}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 D_{ij}\omega}{\partial x_i x_j}, \qquad (7)$$

которое называется прямым уравнением Колмогорова для непрерывного марковского процесса диффузионного типа. Здесь $m$ – размерность многомерного диффузионного процесса. Уравнение (7) относится к параболическим уравнениям в частных производных. Свойства решения уравнения Колмогорова зависят от свойств положительной определенности квадратичной формы

$$L(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{m}D_{ij}(t,\boldsymbol{x})x_i x_j,\quad \|\boldsymbol{x}\|=1. \qquad (8)$$

Рассмотрим выражение для потока вероятности

$$P_i=A_i\omega-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial D_{ij}\omega}{\partial x_i},\ i=1,2,...m. \qquad (9)$$

в направлении координатных осей. Первая составляющая потока вероятности в (9) называется регулярной составляющей, а $A_i$ – проекцией ее скорости на соответствующую координатную ось. Вторая составляющая, называемая диффузионной, соответствует хаотичному перемещению «вероятностной массы» от больших значений плотности к меньшим по аналогии с концентрацией вещества. Диффузионная составляющая характеризуется эллипсоидом рассеивания, уравнение которого определяется квадратичной формой (8). Если квадратичная форма (8) положительно определена ($Q(\boldsymbol{x})\succ 0$ при $\|x\|=1$), то эллипсоид рассеивания не вырожден и диффузионная составляющая потока отлична от нуля для любого пространственного направления. Далее будем рассматривать только этот случай. Тогда существование решения уравнения Колмогорова следует из конструктивного определения диффузионного процесса.

Единственность решения уравнений в частных производных параболического типа обеспечивается дополнительными условиями (начальными и граничными). Для уравнения Колмогорова (7) начальное условие в виде дельта-функции $\omega(x,t)\to\delta(x-x_0)$ при $t\to t_0$ для плотности распределения вероятностей вектора состояний диффузионного процесса соответствует процессу с начальным значением ординаты, равным $\boldsymbol{x_0}$.

Граничные условия зависят от поведения траектории диффузионного процесса в момент достижения ею границы области допустимых значений. Пусть $Q$ – область допустимых значений вектора состояния диффузионного процесса и Γ ее граница. Внутри области Q решение удовлетворяет уравнению (7), а на границе Γ– граничному условию. Если область $Q$ не ограничена, то в бесконечно удаленных точках плотность распределения $\omega(\boldsymbol{x},t)$ должна быстро убывать до нуля. Решение уравнения (7) при начальном условии $\omega(\boldsymbol{x},t_0)=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ называется фундаментальным решением и как показано в /3/, оно для двумерного процесса $\{x_1(t),x_2(t)\}$ при $x_1(0)=x_{10}$ и $x_2(0)=x_{20}$ имеет вид:

$$f\left(x_1,x_2,t\Big/x_{10},x_{20}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi t\sqrt{b_1b_2}}\exp\left[-\frac{(x_1-x_{10}-a_1t)^2}{2b_1t}-\right.$$

$$\left.-\frac{(x_2-x_{20}-a_2t)^2}{2b_2t}\right], \qquad (10)$$

где $a_1$ и $a_2$ – коэффициенты сноса процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соответственно, а $b_1$ и $b_2$ – коэффициенты диффузии.

В прикладных задачах чаще всего имеют место граничные условия поглощения и отражения. Граничное условие поглощения физически означает, что траектория марковского процесса при первом попадании на границу остается в этой точке. Граничное условие поглощения имеет вид $\omega(\boldsymbol{x},t)\to 0$ при $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\Gamma}$, или $\omega(\boldsymbol{x},t)\big|_{\Gamma}=0$ при условии невырожденности диффузионной составляющей потока вероятности.

Граничное условие отражения соответствует такому поведению траектории диффузионного процесса вблизи границы, при котором поток вероятности через границу равен нулю $\mathrm{P}_{\nu}=\sum_{i=1}^{m}\nu_i \mathrm{P}_i\to 0$ при $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\Gamma}$, где ν – внешняя нормаль к границе в точке $\boldsymbol{x}$, причем $\|\nu\|=1$. Это же условие для уравнения (7) можно записать в виде $qrad\ \omega(\boldsymbol{x},t)\big|_{\Gamma}=0$.

На рисунке 1 показаны граничные условия поглощения на границе $\Gamma_1$ и отражения – на границе $\Gamma_2$ для двумерного диффузионного процесса $\{x_1(t), x_2(t)\}$.

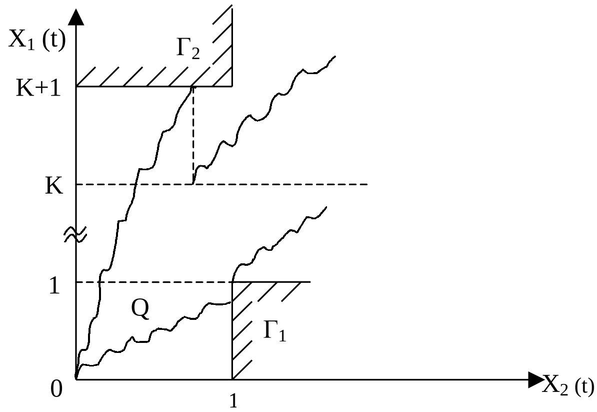


Рисунок 1.

Решение уравнения (7) в области $Q$ с нулевыми граничными условиями при $x_1$=1 и $x_2$=1 ,будет иметь вид /11/ и оно единственно.

$$\omega(x_1,x_2,t)= f(x_1,x_2,t/0{,}0)\left\{1-\exp\left[\frac{2(x_1-1)}{b_1 t}\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{1-\exp\left[\frac{2x_2-1}{b_2 t}\right]\right\}. \qquad (11)$$

**Список использованной литературы:**
1. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов.радио, 1977. – 488 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. – 736 с.
3. Кругликов В.К., Тарасов В.Н. Анализ и расчет сетей массового обслуживания методом двумерной диффузионной аппроксимации. Изв.АН СССР – Автоматика и телемеханика, 1983, №8, 74-83 с.