

## РАСЧЕТ НЕСТАБИЛИЗИРОВАННОГО ТЕЧЕНИЯ ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА В КРУГЛОЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Методами теории ламинарного пограничного слоя рассмотрено течение на участке стабилизации в круглоцилиндрической трубе. Путем решения соответствующих дифференциальных уравнений получена информация об основных параметрах течения. Предложены расчетные соотношения для длины начального участка и потерь давления, вычислен коэффициент Кориолиса на начальном участке потока. Приводятся результаты эксперимента.

При течении ламинарного потока в круглоцилиндрической трубе, также как и в плоском канале, на стенках от входного сечения трубы начинают развиваться динамические пограничные слои, которые по мере удаления от него утолщаются и на некотором расстоянии смыкаются. Участок трубы от входного сечения до сечения полного слияния ламинарных пограничных слоев называют начальным участком, или участком динамической стабилизации течения.

На начальном участке эпюра скорости потока непрерывно деформируется от однородной на входе до параболической на выходе, вид которой определяется течением Пуазейля

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2).$$

За начальным участком  $x > L_d$  эпюра распределения скоростей потока стабилизирована, т. е. остается неизменной по всей длине трубы.

Для расчета длины начального участка и других параметров течения примем физически оправданное допущение о подобии поля скоростей в пограничном слое полю скоростей пуазейлева течения. Действительно, распределение скорости ламинарного стабилизированного течения можно представить в виде

$$\frac{u(r)}{U} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 = 1 - \left(\frac{r-y}{R}\right)^2 = 2\frac{y}{R} - \frac{y^2}{R^2},$$

следовательно, при афинном подобии профилей распределение скоростей по пограничному слою будет определяться таким же законом

$$\frac{u(x, y)}{U(x)} = 2\frac{y}{\delta(x)} - \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^2 = 2\eta - \eta^2, \quad (1)$$

где  $U(x)$  – скорость в ядре потока на начальном участке, а  $\eta$  – обобщенная переменная.

Задача о начальном участке решается применением трех законов: закона сохранения массы (расхода), импульса и энергии.

Условие постоянства объемного расхода жидкости в любом сечении запишем в виде

$$2\pi \int_0^R ru(r)dr = 2\pi \int_0^{R-\delta(x)} ru(r)dr + 2\pi \int_{R-\delta(x)}^R ru(r)dr = \quad (2)$$

$$= \pi(R - \delta)^2 U(x) + 2\pi \int_{R-\delta(x)}^R ru(r)dr = \pi R^2 U_0,$$

где выражение справа – расход жидкости на входе в канал, а  $U_0$  – скорость потока в этом сечении.

Профиль скорости (45) дает возможность рассчитать расход жидкости в ядре потока в любом сечении начального участка  $x$ :

$$\begin{aligned} I_Q &= 2\pi \int_{R-\delta(x)}^R ru(r)dr = \\ &= 2\pi \delta^2(x) U(x) \int_0^1 \left(\frac{R}{\delta(x)} - \eta\right) (2\eta - \eta^2) d\eta = \quad (3) \\ &= 2\pi \delta(x) U(x) \frac{2}{3} \left(1 - \frac{5}{3} \frac{\delta(x)}{R}\right). \end{aligned}$$

С учетом этого выражения уравнение расходов преобразуем к виду

$$\frac{U_0}{U(x)} = 1 - \frac{2}{3} \frac{\delta(x)}{R} + \frac{1}{6} \left(\frac{\delta(x)}{R}\right)^2 = \chi\left(\frac{\delta}{R}\right), \quad (4)$$

где  $\chi(\delta/R)$  – расходная функция.

В точке смыкания пограничных слоев  $\delta/R = 1$  и  $\chi(1) = 1/2$ , т. е. скорость на оси потока в два раза больше средней, как и в течении Пуазейля.

Для нахождения зависимости толщины пограничного слоя по длине трубы обратимся к закону сохранения импульса, который в проекции на направление течения запишем так:

$$K(x) - K(0) = (p(0) - p(x))\pi R^2 - \int_0^x 2\pi R \tau_w(x) dx,$$

где  $K(x)$  – поток импульса массы в сечении  $x$ ;

$\tau_w(x)$  – напряжение вязкого трения на стенке трубы;

$p(x)$  – давление в сечении  $x$ , причем давление не зависит от текущего радиуса (допущение одномерности течения).

Для потока импульса в сечении  $x$  найдем

$$K(x) = 2\pi\rho \int_0^{R-\delta(x)} ru^2(r)dr + 2\pi\rho \int_{R-\delta(x)}^R ru^2(r)dr =$$

$$= \pi\rho U^2(x)R^2 \left( 1 - \frac{14}{15} \frac{\delta}{R} + \frac{4}{15} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 \right) = \quad (5)$$

$$= \pi R^2 \rho U^2(x) \phi \left( \frac{\delta}{R} \right)$$

Здесь  $\phi(\delta/R)$  – силовая функция.

В точке смыкания пограничных слоев  $\delta/R = 1$  и поток импульса в этом сечении по выра-

жению (4) составляет  $K(L_d) = \frac{1}{3} \pi R^2 \rho U^2(x)$ .

Поток импульса на входе равен

$$K(0) = \pi R^2 U_0^2. \quad (6)$$

В точности такой же импульс переносит и осредненный поток. Отношение этих потоков импульса дает коэффициент Буссинеска (корректив количества движения):

$$\beta = \frac{K(L_d)}{K(0)} = \frac{1}{3} \frac{U^2(x)}{U_0^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{\chi^2(1)} = \frac{4}{3}.$$

Подставляя потоки импульсов (5) и (6) в закон сохранения, получим

$$\frac{U^2(x)}{U_0^2} \phi \left( \frac{\delta}{R} \right) - 1 = \frac{p(0) - p(x)}{\rho U_0^2} - \frac{2}{R} \int_0^x \frac{\tau_w}{\rho U_0^2} dx.$$

Вне пограничного слоя поток представляет идеальную жидкость и для нее справедливо уравнение Бернулли

$$p(0) - p(x) = \frac{1}{2} \rho U^2(x) - \frac{1}{2} \rho U_0^2.$$

Заменяя в уравнении (7) перепад давлений, приведем его к виду

$$\frac{U^2(x)}{U_0^2} \left( \phi \left( \frac{\delta}{R} \right) - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{R} \int_0^x \frac{\tau_w}{\rho U_0^2} dx.$$

Заменим отношение скоростей здесь по уравнению расходов (4) и продифференцируем полученное выражение по переменной  $x$ , тогда найдем

$$\frac{\phi' \chi - 2\chi' \left( \phi - \frac{1}{2} \right)}{\chi^2} \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 = - \frac{2}{R} \frac{\tau_w}{\rho U_0^2}. \quad (8)$$

Напряжение трения на стенке  $\tau_w$  вычислим по профилю скорости (1),

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy} \Big|_{y=0} = 2\mu \frac{U(x)}{\delta(x)},$$

тогда уравнение (8) приводится к виду

$$\frac{\phi' \chi - 2\chi' \left( \phi - \frac{1}{2} \right)}{\chi^2} \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 = - \frac{32}{Re} \frac{L}{2R},$$

где число Рейнольдса определено по условиям на входе в трубу  $Re = \rho U_0 2R / \mu$ ,  $\zeta = x/L$ .

Вычислив производные от силовой и расходной функции  $\phi'$  и  $\chi'$  и вводя новую неизвест-

ную  $y = \left( \frac{\delta}{R} \right)^2$ , придадим дифференциальному уравнению следующий вид

$$\frac{dy}{d\zeta} = \frac{48}{Re} \frac{L}{2R}.$$

$$\frac{P^2(y)}{\frac{7}{5} \left( 1 - \frac{4}{7} \sqrt{y} \right) P(y) + 2 \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{y} \right) \left( Q(y) - \frac{1}{2} \right)} \cdot (9)$$

Здесь функции  $P(y)$  и  $Q(y)$  определены так:

$$P(y) = \chi(\sqrt{y}) = 1 - \frac{2}{3} \sqrt{y} + \frac{1}{6} y,$$

$$Q(y) = \phi(\sqrt{y}) = 1 - \frac{14}{15} \sqrt{y} + \frac{4}{15} y.$$

Разделяя переменные в уравнение (9), сведем его к квадратуре

$$J(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\frac{7}{5} \left( 1 - \frac{4}{7} \sqrt{y} \right) P(y) + 2 \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{y} \right) \left( Q(y) - \frac{1}{2} \right)}{P^2(y)} dy =$$

$$= \frac{48}{Re} \frac{L}{2R} \zeta.$$

В конце начального участка  $y=1$ , т. е. верхний предел интегрирования следует положить

равным  $\alpha=1$ ,  $\zeta = \zeta_{нач}$ , тогда, вычисляя интеграл  $J(\alpha)$ , получим

$$J(1) = \frac{106}{5} + \frac{111}{10} \sqrt{2} \cdot \left( \begin{array}{l} \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right) + \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \\ - \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \arctg\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \end{array} \right) = 1,3811. \quad (10)$$

Длина начального участка оказывается равной

$$\frac{L_{нач}}{2R} \frac{1}{Re} = \frac{J(1)}{48} = 0,02877. \quad (11)$$

Для получения другой информации о течении на начальном участке целесообразнее непосредственно численно проинтегрировать уравнение (9) с начальными условиями: при  $\zeta=0$ ,  $y=0$ , т. к. общее аналитическое решение этого уравнения хотя и существует, но оно чрезвычайно громоздкое.

На рисунке 1 приводятся результаты численного интегрирования уравнения (9), полученные при следующих исходных данных для воды: скорость на входе в цилиндрическую трубу  $U_0=0,2$  м, радиус трубы  $R=0,005$  м, длина трубы  $L=1$  м, кинематический коэффициент вязкости  $\nu=10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с. Число Рейнольдса потока, подсчитанное по диаметру, при этом составляло  $Re=2000$ . Расчет по формуле (11) для длины начального участка дает значение  $L_{нач}=0,02877 \cdot 2R \cdot Re=0,575$  м, что соответствует приведенной координате сечения  $\zeta_{нач}=L_{нач}/L=0,575$ . Из представленных графиков также видно, что при  $\zeta=0,575$  толщина пограничного слоя становится равной радиусу, а скорость в исчезающем ядре потока  $U=2U_0$ .

Задача о течении на начальном участке неоднократно рассматривалась в литературе. Так, в [1] для длины начального участка  $L_{нач}/(d \cdot Re)$  получено значение 0,029, автор [2] для нее приводит величину 0,023, в [3] можно найти значение 0,04, а в [4] этот параметр оценивается значением 0,03.

Необходимо отметить, что длина начального участка чувствительна к задаваемому закону распределения скоростей в пограничном слое, что и приводит, видимо, к некоторому разбросу в определении длины начального участка.

Рассмотрим также вопрос о гидравлических потерях на начальном участке трубы. При этом следует иметь в виду, что потери давления обусловлены двумя причинами: с одной стороны, падение давления по потоку связано с ускорением потока в ядре – это обратимая «потеря» давления.

С другой стороны, потери давления вызваны действием вязких сил на стенках трубы – это необратимая (диссипативная) потеря давления. Будем понимать под потерями давления на начальном участке трубы именно эту составляющую. Для этой составляющей потерь давления можно написать следующее выражение

$$\Delta p'_{тр} \pi R^2 = 2\pi R \int_0^{L_{нач}} \tau_w(x) dx,$$

откуда

$$\Delta p'_{тр} = \frac{32}{Re} \frac{L}{d} \rho \frac{U_0^2}{2} \int_0^{\zeta_{нач}} \frac{d\zeta}{\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{y} + \frac{1}{6}y\right)\sqrt{y}},$$

где  $y=y(\zeta)$  – решение уравнения (9) на отрезке  $[0; \zeta_{нач}]$ .

Потери давления при стабилизированном течении на участке такой же длины определяются по формуле Пуазейля

$$\Delta p''_{тр} = \frac{64}{Re} \frac{L \zeta_{нач}}{d} \rho \frac{U_0^2}{2}.$$

Коэффициент увеличения потерь давления на начальном участке трубы определяется так:

$$K = \frac{\Delta p'}{\Delta p''} = \frac{1}{2\zeta_{нач}} \int_0^{\zeta_{нач}} \frac{d\zeta}{P(y)\sqrt{y}}.$$

Произведем замену переменной  $\zeta$  в этом выражении на  $y$  по уравнению (9), а  $\zeta_{нач}$  заменим по формуле (11), тогда для коэффициента увеличения потерь найдем следующую зависимость, справедливую для  $\kappa \leq 1$

$$K(\kappa) = \frac{1}{2} \frac{1}{J(\alpha)}.$$

$$\int_0^{\kappa} \frac{\frac{7}{5} \left(1 - \frac{4}{7}\sqrt{y}\right) P(y) + 2 \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{y}\right) \left(Q(y) - \frac{1}{2}\right)}{P^3(y)\sqrt{y}} dy$$

Так, в конце начального участка  $\kappa=1$ , и расчет по этому выражению дает  $K(1)=1,2671$ , т. е. потери на всей длине начального участка примерно на 25% больше, чем при стабилизированном течении на участке этой же длины. При расчете потерь давления в коротких каналах  $L < L_{нач}$  значения  $K$  следует находить по графику рисунке 2, либо рассчитывать по приведенной формуле.

Из представленного графика видно, что потери давления в коротких каналах могут многократно превышать потери, рассчитанные по формулам стабилизированного течения. Следует отметить, что

найденное значение  $K=1,267$  отличается от приведенного в [1]  $K=1,09$ .

Для потерь давления в трубах с длинами  $L > L_{нач}$  с учетом изложенного вытекает такая формула

$$\begin{aligned} \Delta p_{\Sigma} &= \Delta p_{нач} + \Delta p_{тр} = \\ &= \frac{64 L}{Re d} \left( 1 + (K(1)-1)J(1)Re \frac{d}{L} \right) \rho \frac{U_0^2}{2} = \\ &= \frac{64}{Re} \left( 0,3689 Re + \frac{L}{d} \right) \rho \frac{U_0^2}{2}. \end{aligned}$$

Наконец, рассчитаем коэффициент Кориолиса нестабилизированного течения. По определению имеем

$$\alpha = \frac{\int_{\Sigma} \frac{1}{2} \rho u^2 u d\Sigma}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 U_0 \Sigma} = 2 \frac{\int_0^R ru^3 dr}{R^2 U_0^3}.$$

Интеграл в этом выражении представим так:

$$J = \int_0^R ru^3 dr = J_1 + J_2,$$

где  $J_1 = \int_0^{R-\delta} ru^3 dr = \frac{1}{2} R^2 U^3(x) \left( 1 - \frac{\delta}{R} \right)^2;$

$$J_2 = \int_{R-\delta}^R ru^3 dr = \frac{16}{35} R U^3(x) \delta(x) \left( 1 - \frac{93}{128} \frac{\delta}{R} \right).$$

С учетом этих профильных интегралов для корректива кинетической энергии получаем аналитическую зависимость

$$\begin{aligned} \alpha(\zeta) &= \left( \frac{U(x)}{U_0} \right)^3 \left( 1 - \frac{38}{35} \frac{\delta}{R} + \frac{47}{140} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{1 - \frac{38}{35} \sqrt{y} + \frac{47}{140} y}{P^3(y)}. \end{aligned}$$

Здесь  $y=y(\zeta)$  – решение уравнения (9). В конце начального участка пограничные слои сомкнулись и  $y=1$ , тогда для коэффициента Кориолиса находим

$$\alpha(1) = (2)^3 \left( 1 - \frac{38}{35} + \frac{47}{140} \right) = 2.$$

В других сечениях значение коэффициента Кориолиса характеризует график, представленный на рисунке 3.

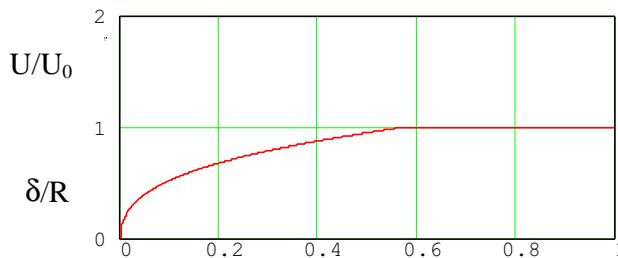


Рисунок 1. Зависимость приведенной толщины  $d/R$  динамического погранслоя и приведенной скорости  $U/U_0$  в ядре потока по длине начального участка

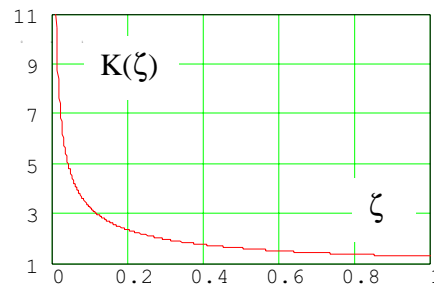


Рисунок 2. График зависимости коэффициента увеличения потерь давления  $K(z)$  по длине начального участка  $z$

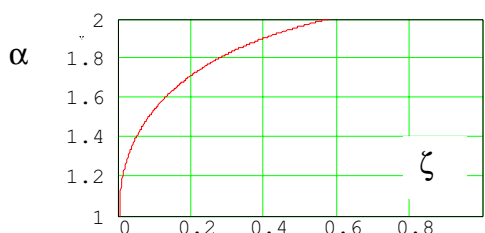


Рисунок 3. Зависимость коэффициента Кориолиса нестабилизированного потока по длине начального участка

Полученные результаты уточняют известные формулы технической механики жидкостей.

Приведем результаты экспериментальной проверки расчета длины начального участка по формуле (11).

Опыты проводились в лаборатории кафедры «Гидромеханики» на установке по демонстрации режимов течения жидкостей, включающей напорный бак, стеклянную трубку, регулятор расхода, а также систему подачи подкрашенной жидкости в основной поток воды.

Во входном сечении стеклянной трубки, заполненной водой, при перекрытом сечении создавалась пробка подкрашенной жидкости. При открытии сечения возникал ламинарный режим течения и пробка начинала деформироваться к параболоиду вращения в соответствии с законом распределения скоростей. Процесс деформации пробки снимался на видеокамеру. При покадровом

вом просмотре фиксировался момент завершения деформации пробки, и по шкале, расположенной рядом со стеклянной трубкой, определялось ее положение от входного сечения. Одновременно в этом опыте измерялся расход жидкости в установке. Так, в опыте было найдено, что подкрашенная пробка превращалась в параболоид вращения на расстоянии  $L=0,31$  м – длина начального участка – при времени заполнения мерного объема  $V=0,5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup> за  $\tau=60$  сек. при диаметре труб-

ки  $d=0,020$  м. Кинематический коэффициент вязкости воды составлял  $\nu=10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, а число Рейнольдса в опыте было  $Re=530$ . Расчет длины начального участка по формуле (11) дает значение  $L_{нач}=0,30$  м, что в пределах погрешности измерений соответствует экспериментально найденной длине  $L=0,31$  м.

Таким образом, предложенный метод расчета хорошо согласуется с результатами опытов и может быть использован в соответствующих расчетах.

**Список использованной литературы:**

1. Гидравлика, гидравлические машины и гидравлические приводы//Под ред. проф. Т. М. Башты. М.: Машиностроение, 1970. – 504 с.
2. Емцев Б. Т. Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1987. – 438 с.
3. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М. – Л.: Гостехгеоретиздат, 1951. – 420 с.
4. Повх И. Л. Техническая гидромеханика. Л.: Машиностроение, 1976. – 502 с.