Е. В. Квитек

ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ, ПРЕДСТАВИМЫХ В БАЗИСЕ ФУНКЦИЙ УОЛША

В работе рассматривается метод фильтрации измерительных сигналов, основанный на использовании в качестве ортогонализирующего базиса функций Уолша. Получены соотношения, обеспечивающие реализацию фильтрующего свойства ортонормированного базиса путем воспроизведения равноамплитудного полинома Уолша. Показана возможность практической реализации фильтрующего устройства, основанная на особенностях равноамплитудных полиномов Уолша. Получено выражение для частотного коэффициента передачи фильтра нижних частот рассматриваемого класса.

Решение задач фильтрации измерительных сигналов предполагает не только изменение соотношения между частотными компонентами, но и выделение из подлежащего фильтрации сигнала отдельных групп частотных компонентов в области нижних частот (фильтрация НЧ), в области высших частот (фильтрация ВЧ) или в определенной полосе частот (полосовая фильтрация).

Поэтому актуальным является установление соотношений, характеризующих процесс формирования группового эффекта в соответствующем диапазоне частот (НЧ, ВЧ и полосе частот) путем выделения отдельных частотных компонентов измерительного сигнала.

Пусть Н-гилбертово пространство сигналов с конечным значением энергии, определенных на отрезке времени $[t_1, t_2]$. При представлении произвольного сигнала $S(t) \in H$ в виде обобщенного ряда Фурье

$$S(t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m u_m(t), \qquad (1)$$

в выбранном базисе групповые свойства не проявляются, т.к. в состав ряда (1) входят все члены $C_m u_m(t)$, где

$$C_m = \int_{t1}^{t_2} S(t) u_m(t) dt = (S, u_m), \qquad (2)$$

т.е. m пробегает все значения от m=0 до m=∞.

Названные группы частотных компонентов (НЧ, ВЧ и ПЧ) согласно принципу суперпозиции могут представлять сигнал

$$S(t) = S_{нч}(t) + S_{пч}(t) + S_{вч}(t). \qquad (3)$$

При этом образующие сигнал S(t) функции $S_{нч}(t), S_{пч}(t), S_{вч}(t)$ могут быть представлены соответствующими частичными суммами обобщенного ряда Фурье (1), т.е.

$$S(t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m u_m(t) = \sum_{m=0}^{N_1} C_m u_m(t) +$$

$$+ \sum_{m=N_1+1}^{N2} C_m u_m(t) + \sum_{m=N_2+1}^{N_3} C_m u_m(t). \qquad (4)$$

Частичные суммы, входящие в состав сигнала S(t), отражают определенные групповые свойства частотных компонентов, их составляющих, т.к. в каждой из функций времени $S_{нч}(t), S_{пч}(t), S_{вч}(t)$ отсутствуют частотные компоненты, образующие две другие.

В дальнейшем полагаем, что синтез частичной суммы $S_{нч}(t)$ осуществляется устройством, структурная схема которого приведена на рис. 1.

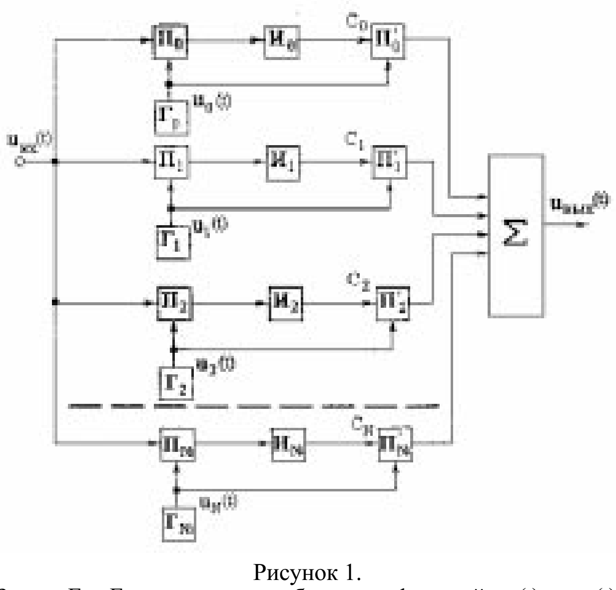

Рисунок 1.

Здесь: $\Gamma_0 \div \Gamma_{N_1}$ – генераторы базисных функций $u_0(t) \div u_{N_1}(t)$ $\Pi_0 \div \Pi_{N_1}$ – перемножители соответствующих базисных функций $u_0(t) \div u_{N_1}(t)$ и входного сигнала S(t), с выходов которых сигналы поступают на интеграторы $И_0 \div И_{N_1}$, выходные напряжения которых, пропорциональные коэффициентам $C_0 \div C_{N_1}$ обобщенного ряда Фурье, одновременно воздействуют на входы перемножителей $\Pi'_0 \div \Pi'_{N_1}$, на вторые входы которых подаются соответствующие базисные функции $u_0(t) \div u_{N_1}(t)$. Суммирование выходных напряжений перемножителей $\Pi'_0 \div \Pi'_{N_1}$ сумматором Σ обеспечивает выходной эффект $S_{нч}(t)$.

Выходной эффект рассматриваемого ФНЧ

$$u_{вых}(t) = S_{нч}(t) = \sum_{m=0}^{M} C_m u_m(t) \qquad (5)$$

при использовании для определения S(t) и C_m выражений (1) и (2) может быть преобразован следующим образом:

$$S_{нч}(и') = \sum_{m=0}^{M} u_m(и') \int_{o_1}^{o_2} S(\theta) u_m(\theta)\, dи =$$

$$= \int_{\xi_1}^{\xi_2} S(\theta)\left[\sum_{m=0}^{M} u_m(\theta') u_m(\theta)\right] d\theta. \qquad (6)$$

Для более четкого проявления групповых свойств частичной суммы $S_{нч}(\theta')$ определим ее как сумму обобщенного ряда Фурье по функциям Уолша:

$$S(\theta) = a(0) + \sum_{i=1}^{\infty}\left[a_c(i)\mathrm{cal}(i,\theta) + a_s(i)\mathrm{sal}(i,\theta)\right] =$$

$$= a(0) + \sum_{i=1}^{\infty}\left[a_c(i)\mathrm{Wal}(2i,\theta) + a_s(i)\mathrm{Wal}(2i-1,\theta)\right]. \quad (7)$$

Так как при формировании опорного сигнала

$$u_{оп} = \sum_{m=0}^{M} u_m(\theta) u_m(\theta') = \sum_{m=1}^{M}\left[a_c(m)\mathrm{Wal}(2m,\theta) + a_s(m)\mathrm{Wal}(2m-1,\theta)\right] \times$$

$$\left[a'_c(m)\mathrm{Wal}(2m,\theta') + a'_s(m)\mathrm{Wal}(2m-1,\theta')\right] \quad (8)$$

должна производиться задержка суммируемых ортогональных элементов Уолша на одну и ту же величину нормированного времени

$$\Delta\theta = \frac{\Delta t}{T} = \frac{t-t'}{T},$$

то форма суммы внутри интервала $-1/2<\theta<1/2$ остается неизменной, претерпевая лишь указанную задержку.

Однако для преобразования суммы ряда (7) в выходной сигнал ФНЧ (5) необходимо, чтобы

$$u_m(\theta) u_m(\theta') = \mathrm{Wal}(m,\theta)\mathrm{Wal}(m,\theta') =$$
$$= \mathrm{Wal}(m, \theta \oplus \theta'), \qquad (9)$$

т.е. опорный сигнал

$$u_{оп} = \sum_{m=0}^{M} \mathrm{Wal}(m, \theta \oplus \theta) \qquad (10)$$

должен быть равноамплитудным полиномом, возможность технической реализации которого предопределяет сокращение числа преобразований при представлении частичной суммы $S_{нч}(\theta')$ в интегральной форме

$$S_{нч}(\theta') = \int_{\xi_1}^{\xi_2} S(\theta) \sum_{m=0}^{M} \mathrm{Wal}(m, \theta \oplus \theta') =$$

$$= a(0) + \sum_{i=1}^{M}\left[a_c(i)\mathrm{Wal}(2i, \theta\oplus\theta\oplus\theta') + a_s(i)\mathrm{Wal}(2i-1, \theta\oplus\theta\oplus\theta')\right] =$$

$$= a(0) + \sum_{i=1}^{M}\left[a_c(i)\mathrm{Wal}(2i,\theta') + a_s(i)\mathrm{Wal}(2i-1,\theta')\right]. \quad (11)$$

Формирование $u_{оп}$ путем суммирования 2M функций Уолша при изменении θ' в пределах от -1/2 до 1/2 требует синхронизации 2M генераторов функций $\mathrm{cal}(i,\theta')$ и $\mathrm{sal}(i,\theta')$ с поддержанием равенства их амплитуд, что является сложной технической задачей и требует значительного объема оборудования.

Генераторы периодических функций Уолша, основанные на теореме умножения функций $\mathrm{Wal}(i,\theta')$ [1], требуют для реализации значительного объема оборудования. Асимметрия суммарной функции

$$u_{оп} = \sum_{m=1}^{M} \mathrm{Wal}(m,\theta)$$

относительно начала координат также усложняет программную реализацию периодических

$$u_{оп} = \sum_{m=1}^{M} \mathrm{Wal}(m, \theta\oplus\theta').$$

Независимость формы $u_{оп}$ от изменений $\theta\oplus\theta'$ (имеется лишь запаздывание $u_{оп}$ относительно начала координат) создает предпосылку для его программированного воспроизведения путем изменения коэффициента передачи масштабного усилителя переключением резисторов в моменты прохождения нулевых мгновенных значений функциями Уолша порядка $M = 2^k$ (где k– целое число), т.к. в этом случае функция Уолша представляет собой последовательность прямоугольных импульсов типа «меандр», легко воспроизводимую генератором стабильной частоты

$$f_M = Mf_0 = \frac{M}{T_0},$$

где $T_0 = \frac{1}{f_0}$ – период аппроксимируемого (подлежащего фильтрации) процесса.

С учетом неизменности формы

$$\sum_{m=1}^{M} Wal(m, \theta \oplus \theta')$$

при изменении θ' представление $u_{оп}$ в виде сумм четных и нечетных функций Уолша

$$u_{оп} = \sum_{m=1}^{M} \left[Wal(2n, \theta \oplus \theta') + Wal(2n-1, \theta \oplus \theta') \right]$$

открывает возможности для существенного сокращения требуемого оборудования, т.к. обе суммы характеризуются симметрией, свойственной четным и нечетным функциям, что позволяет перейти к воспроизведению только полупериодных отрезков названных сумм.

Другим обстоятельством, обеспечивающим сокращение объема оборудования, является возможность представления четных и нечетных полупериодов суммарных функций в виде суперпозиций последовательностей импульсов единичной амплитуды и длительностью

$$\tau = \frac{T}{2M},$$

вырабатываемых генератором, т.к. при суммировании функций sal(M,0) и cal(M,0) при $M = 2^k$ (k-целое число) происходит уменьшение вдвое длительности суммарного эффекта.

В этом случае результат суммирования может быть представлен суперпозицией последовательностей 2M функций Уолша, гармонический спектр которой является суперпозицией спектров периодически повторяемых последовательностей прямоугольных импульсов, длительность которых равна

$$\tau = \frac{T}{4M},$$

а амплитуда определяется результатом суммирования амплитуд импульсов, соответствующих каждой из суммируемых функций Уолша внутри каждого интервала суммирования

$$\Delta t = \tau = \frac{T}{4M}.$$

Возможность использования в качестве структурных элементов последовательностей прямоугольных импульсов с одинаковыми временными параметрами и отличающихся лишь характером симметрии и амплитудами импульсов открывает путь суперпозиционному методу получения в замкнутом виде выражения для суммы равноамплитудного полинома, членами которого являются функции Уолша кратных частостей. При этом существенно то, что количество гармоник, участвующих в образовании суммарного опорного сигнала, остается неизменным и равным

$$P = 3 \cdot \frac{T}{\tau} = 3 \cdot \frac{T}{\frac{T}{4M}}$$

(при ориентации на гармоники, сосредоточенные в пределах первых трех лепестков огибающей амплитудного гармонического спектра последовательности формообразующих прямоугольных импульсов). Это означает, что аппроксимация конечной суммы функций Уолша равных амплитуд при изменении M внутри значений, представимых соседними целыми степенями двойки, производится с одинаковой точностью.

Для примера на рис. 2.а приведена зависимость

$$\sum_{m=1}^{m=\theta} \left[cal(m, \theta) + sal(m, \theta) \right],$$

а на рис 2.6 и в соответственно нечетная и четная составляющие этой суммы.

Очевидно, что для представления этих составляющих требуются последовательности прямоугольных импульсов с одинаковыми временными параметрами, для воспроизведения которых требуется всего один генератор. При выборе в качестве формообразующего элемента последовательности прямоугольных импульсов с параметрами E=2в,

$$\tau = \frac{T}{4M} = \frac{T}{32}$$

для суперпозиционного спектра суммарного процесса

$$\sum_{m=1}^{m=0} \left[cal(m, \theta) + sal(m, \theta) \right]$$

имеем:

$$\begin{aligned} A_{n\Sigma} = A_{n0}(8 + 7e^{-jn\omega\tau} - (e^{jn\omega 2\tau} + e^{-jn\omega 2\tau}) - \\ -(e^{jn\omega 6\tau} + e^{-jn\omega 6\tau}) - (e^{jn\omega 10\tau} + e^{-jn\omega 10\tau}) - \\ -(e^{jn\omega 14\tau} + e^{-jn\omega 14\tau}) - \\ -(e^{jn\omega 3\tau} + e^{jn\omega 7\tau} + e^{jn\omega 11\tau} + e^{jn\omega 15\tau}) - \\ -(e^{-jn\omega 5\tau} + e^{-jn\omega 9\tau} + e^{-jn\omega 13\tau}). \end{aligned} \qquad (12)$$

Выражение для равноамплитудного полинома определяется рядом Фурье с ограниченным числом членов

$$u_{оп} = \sum_{n=-p}^{p} A_{n\Sigma} e^{jn\omega_1 t}, \qquad (13)$$

который позволяет сопоставлять по достижимой точности аппроксимации требуемую частость M функций Уолша с достаточной высшей граничной частотой

$$pf_1 = \frac{pw_1}{2\pi}$$

гармонических функций.

Из (11) следует важнейшее проявление группового свойства опорного сигнала (13), – способность выводить за знак интеграла (6) счетное и управляемое число частотных компонентов входного воздействия.

Воспроизведение функций $S_{нч}(\theta')$ может быть обеспечено устройством, структурная схема которого приведена на рис. 3.

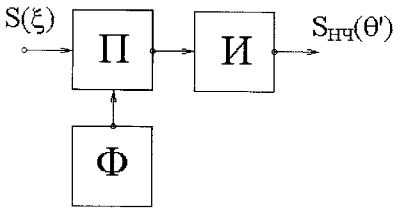

Рисунок 3.

Здесь:
П – перемножитель;
Ф – формирователь $\sum_{m=1}^{M} Wal(m,\theta)$;
И – интегратор.

Формирование $\sum_{m=1}^{M} Wal(m,\theta)$ изменением M в широких пределах обеспечивает фильтрацию сигнала $S(\xi)$.

Действительно, формирование $u_{опM_{max}}(\theta)$ ограниченным количеством членов $M_1 = M_{max}$ равноамплитудного полинома обеспечивает получение $S_{нч}(\theta) = S_{M\,max}(\theta)$ обращением в ноль членов бесконечного ряда Фурье по функциям Уолша (7) с номерами «i», превышающими $M_1 = M_{max}$, т.е. подавление высокочастотной части спектра $S(\theta)$ или его низкочастотную фильтрацию.

Существенно при этом, что в полосе пропускания такого фильтра нижних частот (ФНЧ) соотношение между соответствующими частотными компонентами сохраняется с той степенью точности, с какой удается формировать $u_{опM_{max}}(\theta)$ и интегрировать результат его перемножения с фильтруемым сигналом $S(\theta)$.

Формирование $S_{M\,min}(\theta')$ при $M_1 = M_{min}$ обеспечивает получение

$$S_{вч}(\theta') = S(\theta) - S_{M\,min}(\theta') \qquad (14)$$

с подавленной низкочастотной частью спектра $S(\theta)$.

Для обеспечения эффекта полосовой фильтрации необходимо получить

$$S_{ПФ}(\theta') = S_{ВЧ}(\theta') - [S(\theta) - S_{НЧ}(\theta')], \qquad (15)$$

т.е. сформировать базисную функцию

$$u_{опПФ}(\theta) = u_{оп\,M\,max}(\theta) - u_{оп\,M\,min}(\theta) =$$

$$\sum_{m=1}^{M_{max}} Wal(m,\theta \oplus \theta') - \sum_{m=1}^{M_{min}} Wal(m,\theta \oplus \theta') =$$

$$= \sum_{m=M\,max+1}^{M_{max}} Wal(m,\theta \oplus \theta'), \qquad (16)$$

которая в рассматриваемом случае наделяет $S_{ПФ}(\theta)$ свойствами кодово-импульсной последовательности импульсов с динамическим диапазоном их амплитуд, определяемым количеством членов суммы.

Из (16) следует, в частности, что при

$$M_{max} = M_{mim} + 1$$

$$u_{опПФ}(\theta) = Wal(m,\theta \oplus \theta'),$$

а потому в предельном случае полосовой фильтрации выходной сигнал представляет собой периодически повторяемую функцию Уолша соответствующего порядка.

Оценку возможностей рассматриваемого метода фильтрации целесообразно провести в частотной области, где наиболее эффективно формулируются требования к качественным показателям фильтров. Для этого определим выражение для частотного коэффициента передачи рассматриваемого ФНЧ. Применение прямого преобразования Фурье к (11) имеет следствием:

$$U_{выхM_1}(jnw_1) = \int_{-1/2}^{1/2} S_{нч}(\theta')\, e^{-jn2\pi\theta'} =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-jn2\pi\theta'} \left[\int_{-1/2}^{1/2} S_{НЧвх}(\xi) \sum_{m=0}^{M_1} Wal(m,\theta \oplus \theta') d\xi \right] d\theta' =$$

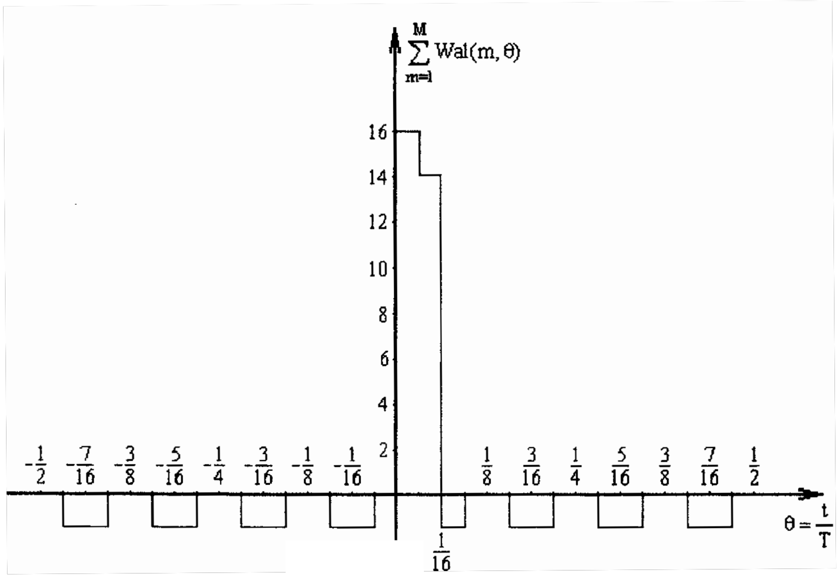

Рисунок 2. а

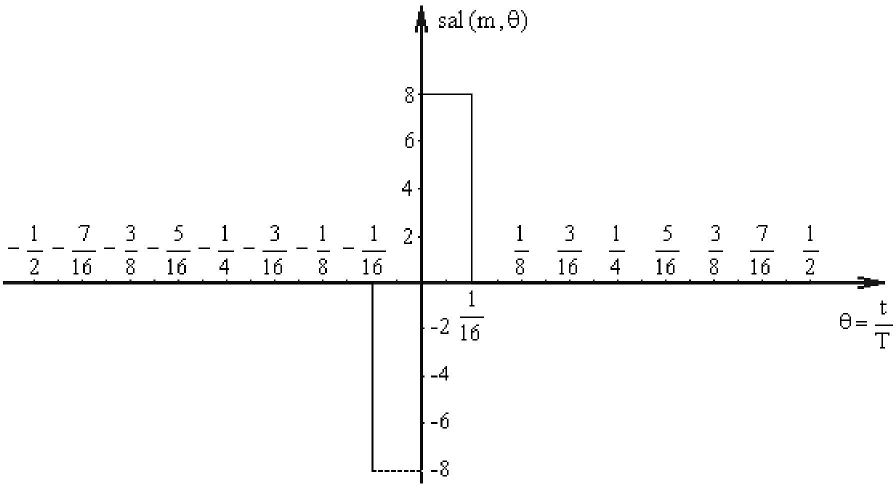

Рисунок 2.б

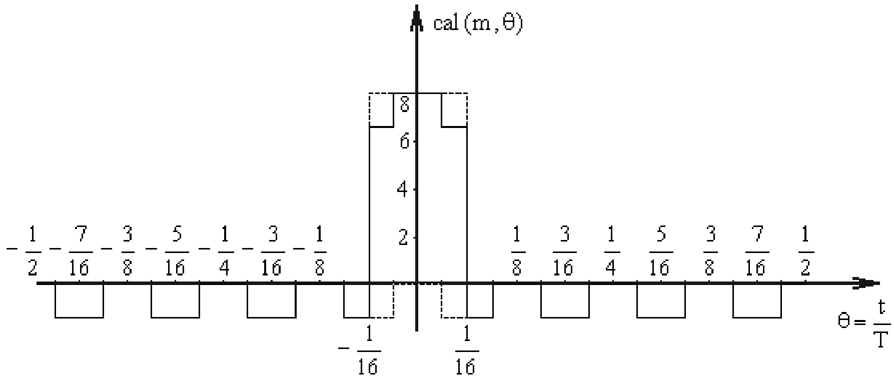

Рисунок 2. в

$$= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-jn2\pi\theta'} \sum_{m=0}^{M_1} Wal(m,\theta')d\theta' \left[\int_{-1/2}^{1/2} S_{НЧвх}(\xi)\, e^{-jn2\pi\xi} d\xi \right] =$$

$$= K(jnw_1) \cdot S_{НЧвх}(jnw_1),$$

где $K(jnw_1) = \sum_{m=1}^{M} \int_{-1/2}^{1/2} Wal(m,\theta')\, e^{-jn2\pi\theta'} d\theta' =$

$= A_{n_0}(jnw_1) \cdot \Phi_м(jnw_1)$ – частотный коэффициент передачи рассматриваемого ФНЧ, а A_{n_0} – спектр последовательности формообразующих прямоугольных импульсов и $\Phi_м(jnw_1)$ – спектр временного множителя, описывающего функцию $\sum_{m=0}^{M_1} Wal(m,\theta')$;

$S_{НЧвх}(jnw_1) = \int_{-1/2}^{1/2} S_{НЧвх}(\xi)\, e^{-jn2\pi\xi} d\xi$ – спектр входного воздействия.

Из (17) следует, что управлять параметрами частотной характеристики ФНЧ можно изменением числа членов полинома

$$u_{оп} = \sum_{m=1}^{M} Wal(m,\theta),$$

либо изменением его структуры.

Таким образом использование в качестве ортогонализирующего базиса равноамплитудных полиномов Уолша открывает возможности как для сокращения объема оборудования, требуемого для реализации соответствующих фильтров, так и для управления параметрами их частотных характеристик.

Список использованной литературы:

1. Хармут Х.Ф. Передача информации ортогональными функциями. Пер. с англ. Дядюнова Н.Г. и Сенина А.И. М., «Связь», 1975.