Г. А. Ивашкина

ВИДОИЗМЕНЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ И ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ С ПАРАМЕТРАМИ A<0, B<0

Обобщенное решение задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу второго рода было получено только для параметров a, b $\in$ (-1;0), причем –1<a+b<0. Задача со смещением была решена в работе [3] для -1/2<a=b<0.

В настоящей работе мы имеем более широкий спектр параметров a и b, т.е. обобщение результатов, полученных ранее [2], [3], [5].

§1. Уравнение, приводящее к уравнению Эйлера-Пуассона-Дарбу с параметрами α<0, β<0

Рассмотрим уравнение

$$U_{xx}-(-y)^{p}U_{yy}+a(-y)^{\frac{p}{2}-1}U_{x}=0, \tag{1}$$

где a $\in$ R, 0<p<2, y<0.

В характеристических координатах (1) переходит в уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$U_{\xi\eta}-\frac{\alpha}{\eta-\xi}U_{\eta}+\frac{\beta}{\eta-\xi}U_{\xi}=0, \tag{2}$$

где $\alpha=\frac{-2a-p}{2(2-p)}$, $\beta=\frac{2a-p}{2(2-p)}$.

Остановимся на случае $-\frac{p}{2}<a<\frac{p}{2}$, при котором α<0, β<0.

§2. Построение обобщенного решения уравнения (2)

Пусть z(α,β) есть решение уравнения (2). Тогда по свойствам уравнения Эйлера-Дарбу оно может быть получено по формуле

$$z(\alpha,\beta)=(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}z(1-\beta,1-\alpha)=(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}\frac{\partial^{m+n}}{\partial\eta^{m}\partial\xi^{n}}z(1-\beta-n,1-\alpha-m), \tag{3}$$

где
$$z(1-\beta-n,1-\alpha-m)=x_1\int_{\xi}^{\eta}\Phi(t)(t-\xi)^{\beta+n-1}(\eta-t)^{\alpha+m-1}dt+x_2(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+m+n-1}\times$$
$$\times\int_{\xi}^{\eta}\Psi(t)(t-\xi)^{-\alpha-m}(\eta-t)^{-\beta-n}dt, \tag{4}$$

(m и n $\in$ N, 0<α+m<1, 0<β+n<1, Φ(t) и Ψ(t) – произвольные функции, являющиеся решением уравнения Эйлера-Дарбу с параметрами 1-β-n, 1-α-m).

Полагая $\Phi(t)=\int_{0}^{t}T(z)(t-z)^{\ell}dz$, преобразуем $\Im_1(\xi,\eta)=\int_{\xi}^{\eta}\Phi(t)(t-\xi)^{\beta+n-1}(\eta-t)^{\alpha+m-1}dt$

к виду

$$\Im_1(\xi,\eta)=(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+m+n-1}\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta+m+n)}\int_{0}^{\xi}T(z)(\eta-z)^{\ell}F(-\ell,\alpha+m;\alpha+\beta+m+n;\frac{\eta-\xi}{\eta-z})dz+$$

$$+(\eta-\xi)^{\beta+n-1}\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(1+\ell)}{\Gamma(\alpha+\ell+m+1)}\int_{\xi}^{\eta}T(z)(\eta-z)^{\alpha+\ell+m}F(1-\beta-n,\alpha+m;\alpha+m+\ell+1;\frac{\eta-z}{\eta-\xi})dz.$$

Используя рекуррентные соотношения Гаусса, нетрудно показать, что

$$\frac{\partial^{m+n}\Im_1(\xi,\eta)}{\partial\eta^m\partial\xi^n}=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+\ell-1}\int_0^{\xi}T(z)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-z}\right)^{-\ell}F(-\ell,\alpha;\alpha+\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-z})dz+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(1+\ell)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha+\ell+1)\Gamma(1-\beta-n)}(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+\ell-1}\int_{\xi}^{\eta}T(z)\left(\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+\ell}F(1-\beta,\alpha;\alpha+\ell+1;\frac{\eta-z}{\eta-\xi})dz. \quad (5)$$

Обозначим второе слагаемое формулы (4) через $\Im_2$.

$$\Im_2(\xi,\eta)=(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+m+n-1}\int_{\xi}^{\eta}\Psi(t)(t-\xi)^{-\alpha-m}(\eta-t)^{-\beta+n}dt=\int_0^1\Psi(\eta-(\eta-\xi)\lambda)(1-\lambda)^{-\alpha}\lambda^{-\beta}d\lambda,$$

$$\frac{\partial^{m+n}\Im_2(\xi,\eta)}{\partial\eta^m\partial\xi^n}=(\eta-\xi)^{\alpha+\beta-1}\int_{\xi}^{\eta}G(z)(z-\xi)^{-\alpha}(\eta-z)^{-\beta}dz. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (3), получим обобщенное решение уравнения (2):

$$U(\xi,\eta)=(\eta-\xi)^{\ell}\int_0^{\xi}T(z)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-z}\right)^{-\ell}F(-\ell,\alpha;\alpha+\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-z})dz+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1+\ell)}{\Gamma(\alpha+\ell+1)\Gamma(\beta)}(\eta-\xi)^{\ell}\times$$

$$\times\int_{\xi}^{\eta}T(z)\left(\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+\ell}F(1-\beta,\alpha;\alpha+\ell+1;\frac{\eta-z}{\eta-\xi})dz+x_2\int_{\xi}^{\eta}G(z)(z-\xi)^{-\alpha}(\eta-z)^{-\beta}dz, \quad (7)$$

где $x_1=(-1)^n\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n)}$.

Каковым бы ни было действительное число $\alpha+\beta<0$, всегда существует два целых отрицательных числа, таких, что $-к<\alpha+\beta<-к+1$ (случай $\alpha+\beta$ равно целому отрицательному числу исключается). Учитывая, что $-m<\alpha<-m+1$ и $-n<\beta<-n+1$, получим $-m-n<\alpha+\beta<-m-n+2$, т.е. $k=m+n$ ($0<\alpha+\beta+m+n<1$) или $k=m+n-1$ ($0<\alpha+\beta+m+n-1<1$).

Для постановки видоизмененной задачи Коши понадобится смешанная частная производная:

$$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial\xi^p\partial\eta^q}=\frac{\Gamma(\ell+1)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+p)\Gamma(\beta+q)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\ell-p-q+1)\Gamma(\alpha+\beta+p+q)}(\eta-\xi)^{\ell-p-q}\int_0^{\xi}T(z)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-z}\right)^{p+q-\ell}\times$$

$$\times F(p+q-\ell,p+\alpha;\alpha+\beta+p+q;\frac{\eta-\xi}{\eta-z})dz+\frac{\Gamma(\ell+1)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+p)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1+\alpha+\ell-q)}(\eta-\xi)^{\ell-p-q}\int_{\xi}^{\eta}T(z)\times$$

$$\times\left(\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+\ell-q}F(1-\beta-n;\alpha+p;1+\alpha+\ell-q;\frac{\eta-z}{\eta-\xi})dz+(-1)^n x_2\frac{\Gamma(\alpha+p)\Gamma(\beta+q)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\times$$

$$\times\int_{\xi}^{\eta}G(z)(z-\xi)^{-\alpha-p}(\eta-z)^{-\beta-q}dz. \quad (8)$$

Пусть $k=m+n-1$ ($-1<\alpha+\beta+m+n-2<0$).

§3. Видоизмененная задача Коши

Используя формулу (8), составим выражение вида

$$\left(\frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial\xi^m\partial\eta^{n-1}}(\beta+n-1)-\frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial\xi^{m-1}\partial\eta^n}(\alpha+m-1)\right)(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+m+n-2}=$$

$$=\frac{\Gamma(\ell+1)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\ell-m-n+2)\Gamma(\alpha+\beta+m+n-1)}(\eta-\xi)^{\ell+\alpha+\beta-1}\int_0^{\xi}T(z)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-z}\right)^{m+n-\ell-1}\times$$

$$\times[F(m+n-\ell-1,m+\alpha;\alpha+\beta+m+n-1;\frac{\eta-\xi}{\eta-z})-F(m+n-\ell-1,m+\alpha-1;m+n+$$

$$+\alpha+\beta-1;\frac{\eta-\xi}{\eta-z})]dz+\frac{\Gamma(\ell+1)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(2+\alpha+\ell-n)}(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+\ell-1}\int_{\xi}^{\eta}T(z)\left(\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+\ell-n}\times$$

$$\times[-(1-\beta-n)\frac{\eta-z}{\eta-\xi}F(2-\beta-n,\alpha+m;2+\alpha+\ell-n;\frac{\eta-z}{\eta-\xi})-(1+\alpha+\ell-n)\times$$

$$\times F(1-\beta-n,\alpha+m-1;\alpha+\ell-n+1;\frac{\eta-z}{\eta-\xi})]dz+[(-1)^{n-1}x_2\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{\xi}^{\eta}G(z)(z-\xi)^{-\alpha-m}\times$$

$$\times(\eta-z)^{-\beta-n+1}dz-(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x_2\int_{\xi}^{\eta}G(z)(z-\xi)^{-\alpha-m+1}(\eta-z)^{-\beta-n}dz](\eta-\xi)^{\alpha+\beta+m+n-2}$$

Применяя известные формулы Гаусса, получим

$$\left(\frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial\xi^m\partial\eta^{n-1}}(\beta+n-1)-\frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial\xi^{m-1}\partial\eta^n}(\alpha+m-1)\right)(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+m+n-2}=$$

$$=-\frac{\Gamma(\ell+1)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1+\ell-m-n)\Gamma(\alpha+\beta+m+n)}(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+\ell-1}\int_0^{\xi}T(z)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-z}\right)^{m+n-\ell}\times$$

$$\times F(m+n-\ell,\alpha+m;\alpha+\beta+m+n;\frac{\eta-\xi}{\eta-z})dz-\frac{\Gamma(\ell+1)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1+\alpha+\ell-n)}(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+\ell-1}\int_{\xi}^{\eta}T(z)\times$$

$$\times\left(\frac{\eta-z}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+\ell-n}F(1-\beta,\alpha+m;1+\alpha+\ell-n;\frac{\eta-z}{\eta-\xi})dz+(-1)^{n-1}x_2\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+m+n-1}\times$$

$$\times\int_{\xi}^{\eta}G(z)(z-\xi)^{-\alpha-m}(\eta-z)^{-\beta-n}dz. \qquad (9)$$

Осуществим подбор параметра ℓ, исходя из следующей системы неравенств $\begin{cases}\ell>m-\beta-1,\\ \ell>n-\alpha-1.\end{cases}$

Легко видеть, что в качестве ℓ можно взять $\ell=-\alpha-\beta$.

Действительно, -α-β>m-β-1 и -α-β>n-α-1.

Подставляя значение ℓ в (9), получим

$$\left(\frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial\xi^m\partial\eta^{n-1}}(\beta+n-1)-\frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial\xi^{m-1}\partial\eta^n}(\alpha+m-1)\right)(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+m+n-2}=$$

$$=-\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta-m-n)\Gamma(\alpha+\beta+m+n)}(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+m+n-1}\int_0^{\xi}T(z)(\eta-z)^{-\alpha-\beta-m-n}\times$$

$$\times F(m+n+\alpha+\beta,\alpha+m;\alpha+\beta+m+n;\frac{\eta-\xi}{\eta-z})dz-\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta-n)\Gamma(\beta)}(\eta-\xi)^{\beta+n-1}\times$$

$$\times\int_{\xi}^{\eta}T(z)(\eta-z)^{-\beta-n}F(1-\beta-n,\alpha+m;1-\beta-n;\frac{\eta-z}{\eta-\xi})dz+(-1)^{n-1}x_2\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\times$$

$$\times(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+m+n-1}\int_{\xi}^{\eta}G(z)(z-\xi)^{-\alpha-m}(\eta-z)^{-\beta-n}\,dz. \qquad (10)$$

Задача. В области Д, ограниченной линиями $\eta=1$, $\xi=0$ и отрезком прямой $\Im$: $\eta=\xi$, найти функцию $U(\xi,\eta)\in C^{m+n-2}(\overline{Д})\cap C^{m+n-1}(Д\cup\Im)$, удовлетворяющую уравнению (2) и краевым условиям

$$U(\xi,\xi)=\tau(\xi)=\int_0^{\xi}T(z)(\xi-z)^{-\alpha-\beta}\,dz, \qquad (11)$$

$$\lim_{\eta\to\xi}[(\beta+n-1)\frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial\xi^m\partial\eta^{n-1}}-(\alpha+m-1)\frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial\xi^{m-1}\partial\eta^n})(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+m+n-2}=\nu(\xi). \qquad (12)$$

Действительно, из (7) следует, что при $\eta=\xi$

$$U(\xi,\xi)=\int_0^{\xi}T(z)(\xi-z)^{\ell}\,dz,\ \text{где}\ \ell=-\alpha-\beta.$$

Представим два первых слагаемых формулы (10) в виде

$$-\frac{\pi\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n)\sin\pi(\alpha+\beta)\cdot(-1)^{m+n}}{\sin\pi(\alpha+\beta)\pi\cdot\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}\int_0^{\frac{\xi}{\eta-\xi}}T(\xi-(\eta-\xi)\lambda)\frac{\lambda^{-\alpha-m}}{(1+\lambda)^{\beta+n}}d\lambda-\frac{\pi}{\sin\pi(\alpha+\beta)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta-n)}\int_0^1T(\eta-(\eta-\xi)\lambda)\lambda^{-\beta-n}(1-\lambda)^{-\alpha-m}d\lambda.$$

Перейдем к пределу при $\eta\to\xi$.

$$T(\xi)\left(-\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n)(-1)^{m+n}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(1-\alpha-m)\Gamma(\alpha+\beta+m+n-1)}{\Gamma(\beta+n)}-\frac{\pi}{\sin\pi(\alpha+\beta)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(1-\alpha-m)\Gamma(1-\beta-n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta-n)\Gamma(2-\alpha-\beta-m-n)}\right)=T(\xi)\frac{\pi}{\sin\pi\alpha\cdot\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(2-\alpha-\beta-m-n)}\times$$

$$\times(-(-1)^n\frac{\pi}{\sin\pi(\alpha+\beta)}(-1)^{m+n-1}-\frac{\pi(-1)^m}{\sin\pi(\alpha+\beta)})=0.$$

Рассмотрим предел третьего слагаемого формулы (10)

$$(-1)^{n-1}x_2\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\lim_{\eta\to\xi}(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+m+n-1}\int_{\xi}^{\eta}G(z)(z-\xi)^{-\alpha-m}(\eta-z)^{-\beta-n}dz=$$

$$=(-1)^{n-1}x_2\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\lim_{\eta\to\xi}\int_0^1G(\eta-(\eta-\xi)\lambda)(1-\lambda)^{-\alpha-m}\lambda^{-\beta-n}d\lambda=$$

$$=(-1)^{n-1}x_2\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}G(\xi)\frac{\Gamma(1-\alpha-m)\Gamma(1-\beta-n)}{\Gamma(2-\alpha-\beta-m-n)}=$$

$$=(-1)^{n-1}x_2\frac{\pi^2(-1)^{m+n}}{\sin\pi\alpha\cdot\sin\pi\beta}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(2-\alpha-\beta-m-n)}G(\xi)=$$

$$=(-1)^{m-1}x_2\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta-m-n)}G(\xi).$$

Таким образом,

$$\lim_{\eta\to\xi}((\beta+n-1)\frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial\xi^m\partial\eta^{n-1}}-(\alpha+m-1)\frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial\xi^{m-1}\partial\eta^n})(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+m+n-2}=$$

$$=(-1)^{m-1}G(\xi)x_2\ \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta-m-n)}=\nu(\xi).$$

Выберем $x_2=(-1)^{m-1}\ \dfrac{\Gamma(2-\alpha-\beta-m-n)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}$, тогда $G(\xi)=\nu(\xi)$.

Следовательно обобщенное решение уравнения (2), найденное по формуле (7), где $\ell=-\alpha-\beta$, с учетом краевых условий (11), (12) примет вид

$$U(\xi,\eta)=\int_0^{\xi}T(z)(\eta-z)^{-\beta}(\xi-z)^{-\alpha}dz+\frac{\sin\pi\beta}{\sin\pi(\alpha+\beta)}\int_{\xi}^{\eta}T(z)(z-\xi)^{-\alpha}(\eta-z)^{-\beta}dz+$$

$$+(-1)^{m-1}\ \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta-m-n)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\int_{\xi}^{\eta}\nu(z)(z-\xi)^{-\alpha}(\eta-z)^{-\beta}dz \tag{13}$$

Аналогично рассматривается случай, когда k=m+n ($-1<\alpha+\beta+m+n-1<0$).

§4. Краевая задача со смещением

Задача. В области Д, ограниченной линиями $\xi=0,\eta=1$ и отрезком прямой $\Im$: $\eta=\xi$, найти функцию $U(\xi,\eta)\in C^{m+n-2}(\overline{Д})\cap C^{m+n-1}(Д\cup\Im)$, удовлетворяющую уравнению (2) и краевым условиям

$$U(\xi,\xi)=\tau(\xi)=\int_0^{\xi}T(z)(\xi-z)^{-\alpha-\beta}dz, \tag{14}$$

$$a(\xi)Д_{0\xi}^{1-\beta}U(0,\xi)+b(\xi)Д_{\xi 1}^{1-\alpha}U(\xi,1)=\gamma(\xi), \tag{15}$$

где $a(\xi), b(\xi), \gamma(\xi)\in C(\overline{\Im})$, $\Gamma(1-\beta)a(\xi)\xi^{-\alpha}+\Gamma(1-\alpha)b(\xi)(1-\xi)^{-\beta}\neq 0$, $b(\xi)=0\ \ ((1-\xi)^{S})$, $s\geq 1-\alpha$.

Воспользуемся обобщенным решением (13) уравнения (2), удовлетворяющим краевому условию (14), из которого находим

$$U(0,\xi)=\frac{\sin\pi\beta}{\sin\pi(\alpha+\beta)}\int_0^{\xi}T(t)t^{-\alpha}(\xi-t)^{-\beta}dt-x\int_0^{\xi}\nu(t)t^{-\alpha}(\xi-t)^{-\beta}dt, \tag{16}$$

$$U(\xi,1)=\int_0^{\xi}T(t)(1-t)^{-\beta}(\xi-t)^{-\alpha}dt+\frac{\sin\pi\beta}{\sin\pi(\alpha+\beta)}\int_{\xi}^{1}T(t)(1-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\alpha}dt-$$

$$-x\int_{\xi}^{1}\nu(t)(t-\xi)^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt, \tag{17}$$

где $x=(-1)^{m}\ \dfrac{\Gamma(2-\alpha-\beta-m-n)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}$.

Введем в рассмотрение операторы дробного порядка дифференцирования и интегрирования (в смысле Лиувилля).

$$Д_{0\xi}^{\mu}f=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\mu)}\displaystyle\int_0^{\xi}\dfrac{f(t)dt}{(\xi-t)^{1+\mu}}, & \mu<0;\\[2ex] \dfrac{d^n}{d\xi^n}Д_{0\xi}^{\mu-n}f(\xi), & \mu>0.\end{cases}$$

$$Д_{\xi 1}^{\mu} f = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\mu)} \displaystyle\int_{\xi}^{1} \dfrac{f(t)dt}{(t-\xi)^{1+\mu}}, & \mu < 0; \\ -\dfrac{d^n}{d\xi^n} Д_{\xi 1}^{\mu-n} f(\xi), & \mu > 0. \end{cases}$$

Действуя указанными в краевом условии (15) операторами на (16) и (17), получим

$$Д_{0\xi}^{1-\beta} U(0,\xi) = \frac{\Gamma(1-\beta)\sin\pi\beta}{\sin\pi(\alpha+\beta)} T(\xi)\xi^{-\alpha} - x\Gamma(1-\beta)\xi^{-\alpha}\nu(\xi), \tag{18}$$

$$Д_{\xi 1}^{1-\alpha} U(\xi,1) = \frac{\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\beta}{\sin\pi(\alpha+\beta)} T(\xi)(1-\xi)^{-\beta} - x\Gamma(1-\alpha)(1-\xi)^{-\beta}\nu(\xi) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+m)} \cdot \frac{d^{m+1}}{d\xi^{m+1}} \times$$
$$\times \int_{\xi}^{1} (t-\xi)^{\alpha+m-1} dt \int_{0}^{t} T(z)(1-z)^{-\beta}(t-z)^{-\alpha} dz. \tag{19}$$

Рассмотрим интеграл

$$\Im_0 = \int_{\xi}^{1} (t-\xi)^{\alpha+m-1} dt \int_{0}^{t} T(z)(1-z)^{-\beta}(t-z)^{-\alpha} dz. \tag{20}$$

Изменим в нем порядок интегрирования

$$\Im_0 = \int_{0}^{\xi} T(z)(1-z)^{-\beta} dz \int_{\xi}^{1} (t-\xi)^{\alpha+m-1}(t-z)^{-\alpha} dt + \int_{\xi}^{1} T(z)(1-z)^{-\beta} dz \int_{z}^{1} (t-\xi)^{\alpha+m-1}(t-z)^{-\alpha} dt =$$
$$= \int_{0}^{\xi} T(z)(1-z)^{-\beta} i_1^0(z,\xi) dz + \int_{\xi}^{1} T(z)(1-z)^{-\beta} i_2^0(z,\xi) dz. \tag{21}$$

Во внутренних интегралах $i_1^0(z,\xi)$ и $i_2^0(z,\xi)$ введем замену переменной по формуле $\dfrac{t-z}{t-\xi} = u$, тогда

$$i_1^0(z,\xi) = (\xi-z)^m \int_{\frac{1-z}{1-\xi}}^{\infty} \frac{u^{-\alpha} du}{(u-1)^{m+1}}, \qquad i_2^0(z,\xi) = (z-\xi)^m \int_{0}^{\frac{1-z}{1-\xi}} \frac{u^{-\alpha} du}{(1-u)^{m+1}}.$$

Интегралы возьмем по частям

$$i_1^0 = \frac{(1-z)^{-\alpha}(1-\xi)^{m+\alpha}}{m} - \frac{\alpha}{m}(\xi-z)^m \int_{\frac{1-z}{1-\xi}}^{\infty} \frac{u^{-\alpha-1}}{(u-1)^m} du,$$

$$i_2^0 = \frac{(1-z)^{-\alpha}(1-\xi)^{m+\alpha}}{m} + \frac{\alpha}{m}(z-\xi)^m \int_{0}^{\frac{1-z}{1-\xi}} \frac{u^{-\alpha-1}}{(1-u)^m}.$$

Подставляя i_1^0 и i_2^0 в (21), получим

$$\Im_0 = \frac{(1-\xi)^{\alpha+m}}{m} \int_{0}^{1} T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta} dz - \frac{\alpha}{m} \int_{0}^{\xi} T(z)(1-z)^{-\beta}(\xi-z)^m dz \int_{\frac{1-z}{1-\xi}}^{\infty} \frac{u^{-\alpha-1} du}{(u-1)^m} +$$

$$+\frac{\alpha}{m}\int_{\xi}^{1}T(z)(1-z)^{-\beta}(z-\xi)^{m}dz\int_{0}^{\frac{1-z}{1-\xi}}\frac{u^{-\alpha-1}du}{(1-u)^{m}}.$$

Находим производную

$$\frac{d\Im_0}{d\xi}=-(1-\xi)^{\alpha+m-1}\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta}dz-\alpha\int_0^{\xi}T(z)(1-z)^{-\beta}(\xi-z)^{m-1}dz\int_{\frac{1-z}{1-\xi}}^{\infty}\frac{u^{-\alpha-1}du}{(u-1)^{m}}-$$

$$-\alpha\int_{\xi}^{1}T(z)(1-z)^{-\beta}(z-\xi)^{m-1}dz\int_{0}^{\frac{1-z}{1-\xi}}\frac{u^{\alpha-1}du}{(1-u)^{m}}. \qquad (22)$$

Снова внутренние интегралы берем по частям

$$\int_{\frac{1-z}{1-\xi}}^{\infty}\frac{u^{-\alpha-1}du}{(u-1)^{m}}=\frac{1}{m-1}(1-z)^{-\alpha-1}(1-\xi)^{\alpha+m}(\xi-z)^{1-m}-\frac{\alpha+1}{m-1}\int_{\frac{1-z}{1-\xi}}^{\infty}\frac{u^{-\alpha-2}du}{(u-1)^{m-1}},$$

$$\int_{0}^{\frac{1-z}{1-\xi}}\frac{u^{\alpha-1}du}{(1-u)^{m}}=\frac{1}{m-1}(1-z)^{-\alpha-1}(1-\xi)^{\alpha+m}(z-\xi)^{1-m}+\frac{1+\alpha}{m-1}\int_{0}^{\frac{1-z}{1-\xi}}\frac{u^{-\alpha-2}}{(1-u)^{m-1}}du.$$

Подставляя полученные выражения для внутренних интегралов в (22) и дифференцируя затем $\frac{d\Im_0}{d\xi}$, получим

$$\frac{d^2\Im_0}{d\xi^2}=(m+\alpha-1)(1-\xi)^{m+\alpha-2}\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta}dz+\alpha(1-\xi)^{m+\alpha-1}\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta-1}dz+$$

$$+\alpha(\alpha+1)\int_0^{\xi}T(z)(1-z)^{-\beta}(\xi-z)^{m-2}dz\int_{\frac{1-z}{1-\xi}}^{\infty}\frac{u^{-\alpha-2}du}{(u-1)^{m-1}}+\alpha(\alpha+1)\int_{\xi}^{1}T(z)(1-z)^{-\beta}(z-\xi)^{m-2}dz\times$$

$$\times\int_{0}^{\frac{1-z}{1-\xi}}\frac{u^{-\alpha-2}du}{(1-u)^{m-1}}. \qquad (23)$$

Снова внутренние интегралы берем по частям, преобразуя $\frac{d^2\Im_0}{d\xi}$ к виду

$$\frac{d^2\Im_0}{d\xi}=(m+\alpha-1)(1-\xi)^{m+\alpha-2}\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta}dz+\alpha(1-\xi)^{m+\alpha-1}\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta-1}dz+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)}{m-2}(1-\xi)^{\alpha+m}\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta-2}dz-\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{m-2}\int_0^{\xi}T(z)(1-z)^{-\beta}(\xi-z)^{m-2}dz\times$$

$$\times\int_{\frac{1-z}{1-\xi}}^{\infty}\frac{u^{-\alpha-3}du}{(u-1)^{m-2}}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{m-2}\int_{\xi}^{1}T(z)(1-z)^{-\beta}(z-\xi)^{m-2}dz\int_{0}^{\frac{1-z}{1-\xi}}\frac{u^{-\alpha-3}du}{(1-u)^{m-2}}.$$

Находим

$$\frac{d^3\Im_0}{d\xi^3}=-(m+\alpha-1)(m+\alpha-2)(1-\xi)^{m+\alpha-3}\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta}dz-\alpha(\alpha+m-1)(I-\xi)^{m+\alpha-2}\times$$

$$\times\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta-1}dz-\alpha(\alpha+1)(1-\xi)^{\alpha+m-1}\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta-2}dz-\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\times$$

$$\times\int_0^\xi T(z)(1-z)^{-\beta}(\xi-z)^{m-3}dz\int_{\frac{1-z}{1-\xi}}^{\infty}\frac{u^{-\alpha-3}du}{(u-1)^{m-2}}-\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\int_\xi^1 T(z)(1-z)^{-\beta}(z-\xi)^{m-3}dz\times$$

$$\times\int_0^{\frac{1-z}{1-\xi}}\frac{u^{-\alpha-3}du}{(1-u)^{m-2}}. \qquad (24)$$

Продолжая указанные преобразования дальше и наблюдая за закономерностями, проявленными в формулах (22), (23) и (24), получим

$$\frac{d^m\Im_0}{d\xi^m}=(-1)^m\Bigg((m+\alpha-1)(m+\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha+1)(1-\xi)^{\alpha}\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta}dz+$$

$$+\alpha(\alpha+m-1)(\alpha+m-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha+2)(1-\xi)^{\alpha+1}\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta-1}dz+$$

$$+\alpha(\alpha+1)(\alpha+m-1)(\alpha+m-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha+3)(1-\xi)^{\alpha+2}\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta-2}dz+\ldots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\ldots\cdot(\alpha+m-2)(\alpha+m-1)}{(\alpha+m-1)}(1-\xi)^{\alpha+m-1}\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta-m+1}dz+$$

$$+\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\ldots\cdot(\alpha+m-1)\int_0^\xi T(z)(1-z)^{-\beta}dz\int_{\frac{1-z}{1-\xi}}^{\infty}\frac{u^{-\alpha-m}du}{u-1}+$$

$$+\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\ldots\cdot(\alpha+m-1)\int_\xi^1 T(z)(1-z)^{-\beta}dz\int_0^{\frac{1-z}{1-\xi}}\frac{u^{-\alpha-m}du}{1-u}\Bigg). \qquad (25)$$

Множители, стоящие перед интегралами в формуле (25), могут быть заменены через гамма функции.

$$\frac{d^m\Im_0}{d\xi^m}=(-1)^m\Bigg(\frac{\Gamma(m+\alpha)}{\alpha\Gamma(\alpha)}(1-\xi)^{\alpha}\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta}dz+\frac{\Gamma(\alpha+m)}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}(1-\xi)^{\alpha+1}\times$$

$$\times\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta-1}dz+\frac{\Gamma(\alpha+m)}{(\alpha+2)\Gamma(\alpha)}(1-\xi)^{\alpha+2}\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta-2}dz+\ldots+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+m)}{(\alpha+m-1)\Gamma(\alpha)}(1-\xi)^{\alpha+m-1}\int_0^1 T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta-m+1}dz+\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\xi T(z)(1-z)^{-\beta}dz\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{1-z}{1-\xi}}^{\infty}\frac{u^{-\alpha-m}du}{u-1}+\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\xi}^{1}T(z)(1-z)^{-\beta}dz\int\limits_{0}^{\frac{1-z}{1-\xi}}\frac{u^{-\alpha-m}du}{1-u}\Bigg\} \qquad (26)$$

Изучим вопрос о нахождении производной от двух последних интегралов, ибо применить тот же метод, которым мы пользовались ранее при нахождении производной, нельзя, так как получим расходящиеся интегралы. Для этого введем обозначение

$$H(\xi,\varepsilon)=\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}T(z)(1-z)^{-\beta}dz\int\limits_{\frac{1-z}{1-\xi}}^{\infty}\frac{u^{-\alpha-m}}{u-1}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{1}T(z)(1-z)^{-\beta}dz\int\limits_{0}^{\frac{1-z}{1-\xi}}\frac{u^{-\alpha-m}du}{1-u}.$$

Очевидно, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{dH(\xi,\varepsilon)}{d\xi}=\frac{dH}{d\xi}$.

Находим

$$\frac{dH}{d\xi}=\lim_{\varepsilon\to 0}(T(\xi-\varepsilon)(1-\xi+\varepsilon)^{-\beta}\int\limits_{\frac{1-\xi+\varepsilon}{1-\xi}}^{\infty}\frac{u^{-\alpha-m}du}{u-1}-T(\xi+\varepsilon)(1-\xi-\varepsilon)^{-\beta}\int\limits_{0}^{\frac{1-\xi-\varepsilon}{1-\xi}}\frac{u^{-\alpha-m}du}{1-u}-$$

$$-(1-\xi)^{\alpha+m-1}\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta-m+1}\frac{dz}{\xi-z}-(1-\xi)^{\alpha+m-1}\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{1}T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta-m+1}\frac{dz}{\xi-z})=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left((T(\xi-\varepsilon)(1-\xi+\varepsilon)^{-\beta}-T(\xi+\varepsilon)(1-\xi-\varepsilon)^{-\beta})\int\limits_{\frac{1-\xi+\varepsilon}{1-\xi}}^{\infty}\frac{u^{-\alpha-m}}{u-1}-\right.$$

$$-T(\xi+\varepsilon)(1-\xi-\varepsilon)^{-\beta}(\int\limits_{\frac{1-\xi+\varepsilon}{1-\xi}}^{\infty}\frac{u^{-\alpha-m}}{1-u}du+\int\limits_{0}^{\frac{1-\xi-\varepsilon}{1-\xi}}\frac{u^{-\alpha-m}}{1-u}du)-(1-\xi)^{\alpha+m-1}(\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta+1-m}\times$$

$$\left.\times\frac{dz}{\xi-z}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{1}T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta+1-m}\frac{dz}{\xi-z})\right)=$$

$$=-(1-\xi)^{\alpha+m-1}\int\limits_{0}^{1}\frac{T(z)(1-z)^{1-\alpha-\beta-m}}{\xi-z}dz-\pi T(\xi)(1-\xi)^{-\beta}\operatorname{ctg}\pi(1-\alpha-m). \qquad (27)$$

С учетом того, что производная от двух последних слагаемых формулы (26) есть $\frac{dH}{d\xi}$, найдем

$$\frac{d^{m+1}\Im_0}{d\xi^{m+1}}=(-1)^{m+1}\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_{0}^{1}T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta}(1-\xi)^{\alpha-1}\left(1+\frac{1-\xi}{1-z}+\left(\frac{1-\xi}{1-z}\right)^{2}+\ldots+\right.\right.$$

$$+\left(\frac{1-\xi}{1-z}\right)^{m-1}\Bigg)dz+(1-\xi)^{\alpha+m-1}\int_0^1\frac{T(z)(1-z)^{1-\alpha-\beta-m}dz}{\xi-z}+\pi ctg\pi(1-\alpha)\cdot T(\xi)(1-\xi)^{-\beta}\Bigg).$$

Применяя формулу суммы m членов геометрической прогрессии

$$S_m=1+\frac{1-\xi}{1-z}+\left(\frac{1-\xi}{1-z}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1-\xi}{1-z}\right)^{m-1}=\frac{1-\left(\frac{1-\xi}{1-z}\right)^m}{\frac{\xi-z}{1-z}},$$

получим для $\frac{d^{m+1}\Im_0}{d\xi^{m+1}}$ следующее выражение

$$\frac{d^{m+1}\Im_0}{d\xi^{m+1}}=(-1)^{m+1}\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)}\Bigg((1-\xi)^{\alpha-1}\int_0^1\frac{T(z)(1-z)^{1-\alpha-\beta}}{\xi-z}dz+$$
$$+\pi ctg\pi(1-\alpha)T(\xi)(1-\xi)^{-\beta}\Bigg). \quad (28)$$

Подставим (28) в (19)

$$Д_{\xi 1}^{1-\alpha}U(\xi,1)=\frac{\pi}{\Gamma(\alpha)}\Bigg(\left(\frac{\sin\pi\beta}{\sin\pi\alpha\cdot\sin\pi(\alpha+\beta)}+(-1)^{m+1}ctg\pi\alpha\right)T(\xi)(1-\xi)^{-\beta}+$$
$$+\frac{(-1)^{m+1}(1-\xi)^{\alpha-1}}{\pi}\int_0^1\frac{T(z)(1-z)^{1-\alpha-\beta}dz}{z-\xi}-x\frac{(1-\xi)^{-\beta}}{\sin\pi\alpha}\nu(\xi)\Bigg) \quad (29)$$

Найденные по формулам (29) и (18) выражения для операторов подставим в краевые условия (15), получим уравнение для определения функции $\nu(\xi)$.

$$x\left(\Gamma(1-\beta)\xi^{-\alpha}a(\xi)+\Gamma(1-\alpha)(1-\xi)^{-\beta}b(\xi)\right)\nu(\xi)=$$
$$=\frac{\sin\pi\beta}{\sin\pi(\alpha+\beta)}T(\xi)\left(\Gamma(1-\beta)\xi^{-\alpha}a(\xi)+\Gamma(1-\alpha)(1-\xi)^{-\beta}b(\xi)\right)-\Big(\gamma(\xi)+(-1)^m\Gamma(1-\alpha)\times$$
$$\times b(\xi)\cos\pi\alpha(1-\xi)^{-\beta}T(\xi)\Big)+\frac{(-1)^{m+1}b(\xi)(1-\xi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^1\frac{T(z)(1-z)^{1-\alpha-\beta}dz}{z-\xi} \quad (30)$$

Задача однозначно разрешима, если

$$\Gamma(1-\beta)\xi^{-\alpha}a(\xi)+\Gamma(1-\alpha)(1-\xi)^{-\beta}b(\xi)\neq 0,\quad b(\xi)=O\left((1-\xi)^S\right),\quad S\geq 1-\alpha.$$

Рассмотренные задачи являются обобщением задачи Коши и задачи со смещением для любых отрицательных параметров. Результаты, полученные в работе, являются новыми.

Список использованной литературы:
1. Hardy G., Littlewood I., Some properties of fractional integrals. I Math. z., 27, 565 – 606, 1928.
2. Нахушев А. М. Дифференциальные уравнения, 5, № 1, 1969.
3. Ивашкина Г. А., Невоструев Л. М. Дифференциальные уравнения, 14, № 2, 1978.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ФМ, Москва, 1962.
5. Кароль И. А. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. ДАН СССР, 88, 2, 1953.