

А.М.Пищухин, А.В.Шалкин

МАТРИЧНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Сложные системы управления, характеризующиеся иерархичностью в одном направлении и мультиструктурностью в другом определяются как матричные. Предложена классификация таких систем. Подробно рассмотрены мультиструктурные системы параллельного действия, поставлена и решена задача оптимизации.

Две современные тенденции в автоматизации: агрегирование с одной стороны и декомпозиция с другой, требуют использования матричных систем управления. Последние характеризуются иерархичностью в направлении движения управляющей информации и мультиструктурностью в перпендикулярном направлении.

Общую иерархию управления можно представить следующим образом. На самой вершине дерева формулируется цель управления, она разбивается на задачи, решением которых можно ее достигать. Далее для задач подбираются методы решения, для них составляется программа или алгоритм управления, включающий необходимые команды. Наконец, команды разбиваются на операции с выделением функций, а последние формируют необходимые управляющие уставки или режимы. Схема такой многоуровневой системы управления приведена на рисунке 1.

Здесь применяются следующие обозначения: \mathbf{Y} – вектор управляемых величин, \mathbf{F} – вектор возмущающих воздействий, \mathbf{U} – вектор управляющих воздействий на объект управления, \mathbf{C} – цель управления, $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ – задачи, $\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_3$ – методы, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ – программы, $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ – команды, $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$ – операции, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ – функции, $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ – уставки. Для упрощения на схеме показаны не все элементы.

Если задающие блоки обеспечивают лишь уставки для регулирования – уровень уставок (множество задающих блоков = $\{\text{const}_1, \text{const}_2, \dots, \text{const}_N\}$), то систему можно назвать **многорежимной**, и ее работа заключается в своевременном переключении или поддержании этих режимов.

Задающие блоки могут реализовывать ту или иную функцию (множество задающих блоков = $\{f_1(), f_2(), \dots, f_N()\}$), и тогда система станет **многофункциональной**.

Задаваемые функции могут объединяться в группы и образовывать некие операторы (множество задающих блоков = $\{A_1[], A_2[], \dots, A_N[]\}$), придавая тем самым системе статус **многооператорной** или, поскольку выполнение оператора есть операция – **многооперационной**. В технике совокупность нескольких функций приводит к выполнению операции (например, нагревая кольцо и сажая его прессом на деталь, будем выполнять операцию посадки с натягом).

Операторы могут объединяться в команды, и в этом случае мы имеем дело с **многокомандной** системой. Команды, в свою очередь, могут быть объединены в программу – в этом случае система **многопрограммная (мультипрограммная)**. Программа, в свою очередь, реализует какой-либо метод управления. Такую систему можно назвать **системой с возможностью выбора метода**. С помощью методов решаются задачи, поэтому система более высокого уровня становится **многозадачной**. Роль задающих блоков в системе управления могут играть люди – субъекты. Учитывая, что субъект может ставить и менять цели только в этом случае система управления станет **многоцелевой**. В такой постановке цели рассматриваются как совокупности нескольких задач.

Итак, многоуровневое управление включает в себя иерархию целей, задач, методов, программ, команд, операций, функций и уставок. Кроме того, внутри каждого уровня может присутствовать дополнительное разбиение задач на подзадачи, методов на методики, программ на подпрограммы и т.д.

По алгоритму работы задающих блоков матричные системы можно поделить на системы с параллельной (одновременной) работой, с последовательной (программной или цепной)

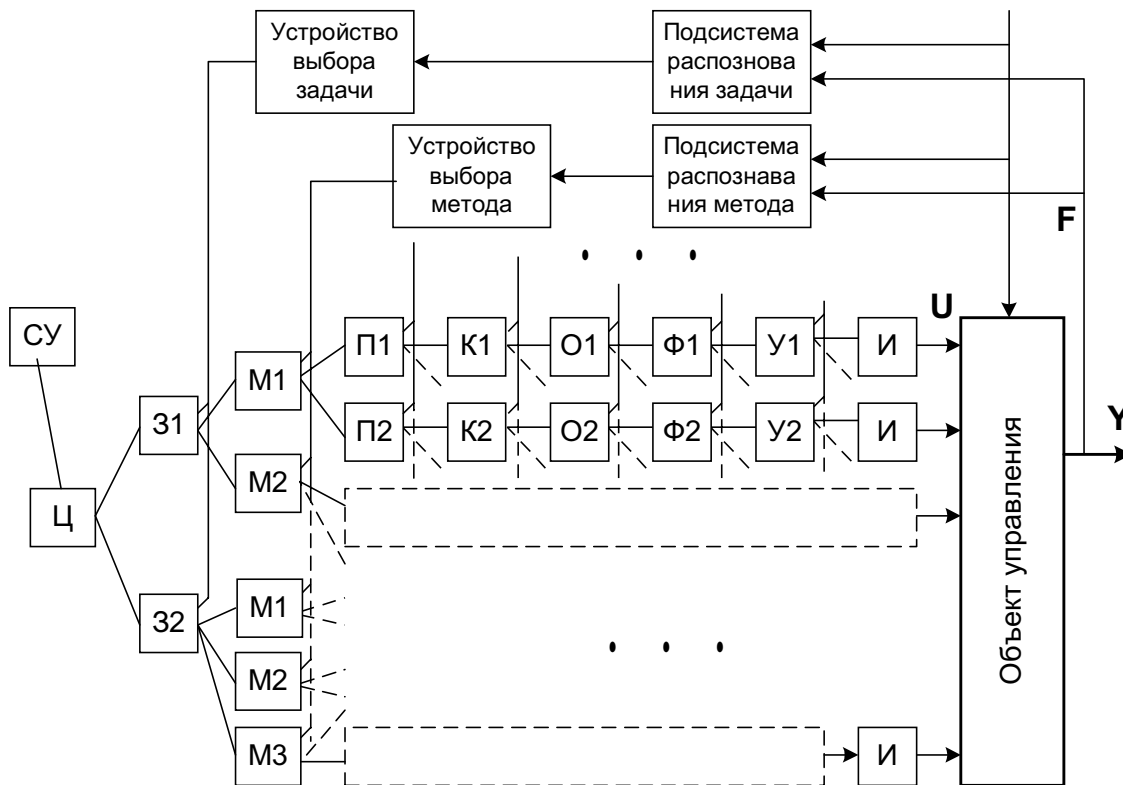


Рисунок 1 – Схема многоуровневой системы управления

работой и с произвольным выбором задающих блоков в зависимости от создавшихся условий.

При последовательной работе, выбранная в данный момент структура единовластно пользуется ресурсами управляющих воздействий, а также может пользоваться элементами из других структур, так как они в это время все равно “простаивают”. Имеет место перекрытие структур (см. рисунок 2). Это перекрытие для двух структур может быть оценено коэффициентом структурного перекрытия *j*-той структуры по отношению к *i*-той:

$$c_{ij} = \frac{K_{ij}}{K_i}$$

где K_{ij} – количество совместно используемых элементов структур, а K_i – общее количество элементов в *i*-той структуре. При этом эти два числа могут оцениваться и в стоимостном выражении.

Если в мультиструктурной системе *n* ветвей, то характеристикой количества совместно используемых элементов будет уже матрица структурного перекрытия

$$C = \begin{Bmatrix} c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n} \\ c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n} \\ \dots \\ c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nn} \end{Bmatrix}.$$

Диагональные коэффициенты этой матрицы - единичные, а все остальные могут быть равны или меньше единицы. Ясно, что приближение коэффициентов матрицы к единице повышает загруженность элементов системы, уменьшает суммарную ее стоимость и сложность. Следовательно, при проектировании новой мультиструктурной системы необходимо добиваться как можно большего значения суммы всех коэффициентов этой матрицы

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \rightarrow \max.$$

Очевидно, для параллельных мультиструктурных систем необходимо также найти характеристику, отражающую степень участия каждой структуры в распределении общих ресурсов управления (рисунок 2). Для обеспечения возможности сравнения хода процесса управления в каждой структуре необходимо взять дис-

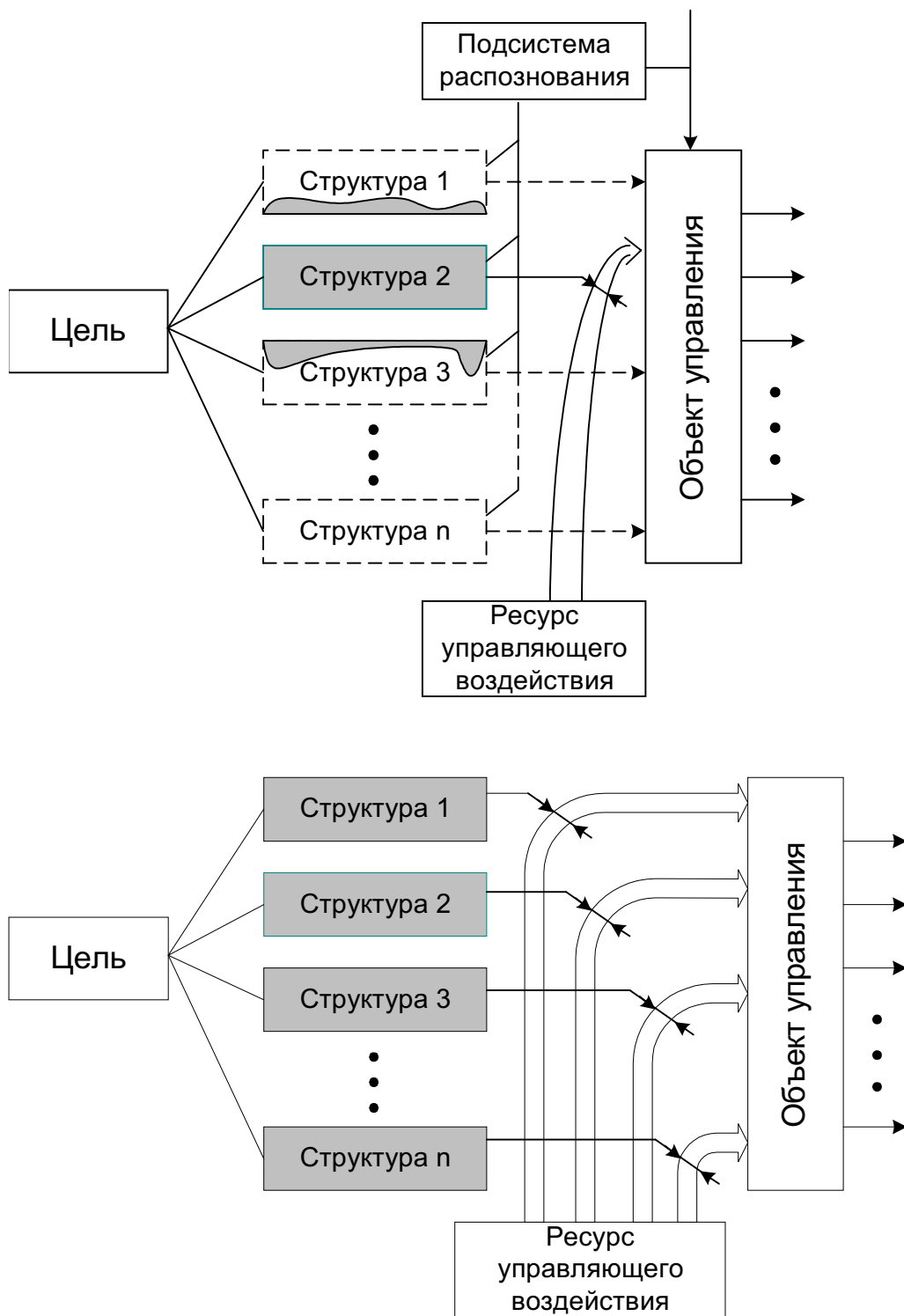


Рисунок 2 – Схема мультиструктурных систем последовательного и параллельного действия

персию управляемой величины (или среднеквадратичное отклонение σ) и отнести ее к норме. Полученное отношение будет отражать потери, возникающие от недостатка ресурсов управления этой величиной. Однако данная управляемая величина может быть незначительной с точки зрения общей цели мультиструктурной системы и поэтому допустима даже большая ее дисперсия. Чтобы учесть этот факт, умножим относительную дисперсию данной управляемой величины (за управление которой ответственна одна из структур мультиструктурной системы) на коэффициент ее значимости, определенный, например, экспертами. Назовем полученную в результате величину "потерей" от дисперсии управляемой величины. Располагая потерями, например, в порядке их увеличения, получим диаграмму (смотри рисунок 3).

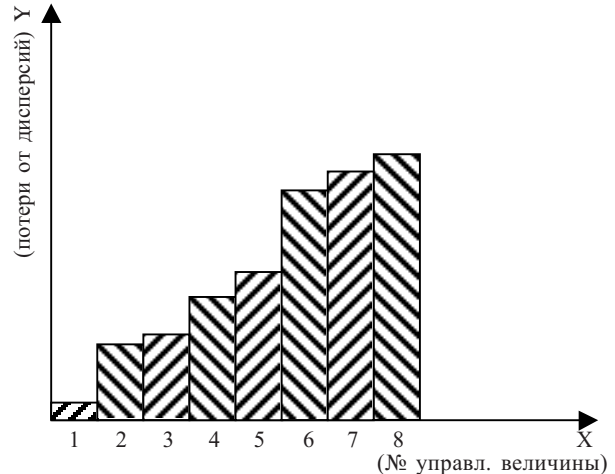


Рисунок 3 – Диаграмма потерь от дисперсий управляемых величин

Изменения этой диаграммы во времени могут служить характеристикой интенсивности протекающих перераспределительных процессов в мультиструктурной системе управления. Очевидно, что в хорошо работающей системе потери от дисперсий должны быть примерно одинаковы, а суммарная занимаемая ими площадь должна быть минимальной

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i \rightarrow \min.$$

Это обстоятельство необходимо иметь в виду при синтезе мультиструктурной системы параллельного действия.

Очевидно, эти два эмерджентных свойства (то есть появляющихся только при объединении элементов в систему) – возможность перекрытия последовательно работающих структур и возможность перераспределения управляющих ресурсов с "сильных" структур на "слабые" – придают главный смысл агрегированию локальных систем автоматики в единую мультиструктурную систему.

Больше того, полное снятие управляющих ресурсов со всех структур кроме одной превращает параллельную мультиструктурную систему в последовательную, а полное перекрытие одной ветвью другой приводит к обратному результату.

Теория мультиструктурных систем последовательного действия достаточно хорошо разработана в виде теории систем случайной структуры /1/. Рассмотрим подробнее мультиструктурные системы параллельного действия.

Предположим, что каждая ветвь мульти-

структурной системы представляет стохастический регулятор, описываемый уравнением Ито

$$\begin{cases} dY(t) = \Psi(Y(t), t) dt + G(Y(t), t) \cdot dw(t), \\ Y(0) = Y_0. \end{cases}$$

От уравнения Ито можно однозначно перейти к уравнению Колмогорова /2/

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k} (a_k(Y, t) \cdot f) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_m} (b_{km}(Y, t) \cdot f) = 0 \end{aligned} \quad (1),$$

в котором $f(Y(t), t)$ - плотность вероятности выходных величин, а векторная функция векторного аргумента:

$$a(Y, t) = \begin{pmatrix} a_1(Y, t) \\ \vdots \\ a_n(Y, t) \end{pmatrix} \equiv \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{M[Y(t) - Y(\tau)]}{t - \tau}$$

характеризует скорость изменения значений исходного случайного процесса.

Матричная функция векторного аргумента

$$b(Y, t) = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{M[(Y(t) - Y(\tau)) \cdot (Y(t) - Y(\tau))^T]}{t - \tau}$$

принимая значения в множестве $M_n(R)$, характеризует скорость изменения условной дисперсии этого случайного процесса. В литературе $a(Y, t)$ и $b(Y, t)$ часто называют вектором сноса и матрицей диффузии соответственно.

Специальной подстановкой /3/ из уравнения (1) можно убрать второе слагаемое. Управляющее воздействие попадает в правую часть и делает уравнение (1) неоднородным.

Решение преобразованного неоднородного

уравнения (1) можно выразить через функцию Грина

$$f(Y, t) = \exp\left(\frac{a^2}{b}t - \frac{a}{b}y\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi b t}} \exp\left(-\frac{(y-\xi)^2}{4bt}\right) u(\xi, t) dt d\xi$$

Подставляя в правую часть этого решения желаемый результат управления, например, нормальный закон, получаем уравнение Фредгольма 1-го рода.

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-y_{ycm})^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi b t}} \exp\left(-\frac{(y-\xi)^2}{4bt}\right) u(\xi, t) dt d\xi$$

С помощью этого уравнения можно исследовать динамику системы управления. Ограничимся исследованием установившегося движения. Для этого, вернувшись к уравнению (1) для одномерного случая с постоянными коэффициентами a и b , уберем производную по времени и подставим вместо плотности вероятности нормальный закон распределения:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{b}{2\sigma^5} (y-y_{ycm})^2 - \frac{b}{2\sigma^3} - \frac{a}{\sigma^3} (y-y_{ycm}) \right] \cdot e^{-\frac{(y-y_{ycm})^2}{2\sigma^2}} = u(y), \quad (2)$$

где y_{ycm} - уставка регулятора, $u(y)$ - управляющее воздействие

Введем понятие виртуальной работы как работы, которую необходимо совершать системе управления для поддержания дисперсии выходной величины на заданном уровне

$$A(\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(y) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-y_{ycm})^2}{2\sigma^2}} dy. \quad (3)$$

Пользуясь формулой (2) можно построить зависимость дисперсии выходной величины от виртуальной работы, имеющей следующий вид, объяснимый природой процесса (см. рисунок 4). Прилагая все большие ресурсы управления (увеличивая виртуальную работу управления), можно уменьшить дисперсию управляемой величины до сколь угодно малой величины (однако не до нуля). Наоборот, уменьшая ресурсы, направляемые на управление, приходим к увеличению дисперсии вплоть до бесконечности.

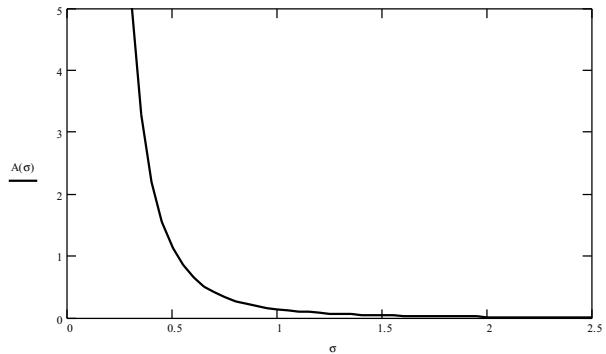


Рисунок 4 – Зависимость виртуальной работы от дисперсии

Имея зависимости дисперсии управляемой величины от виртуальной работы по управлению, можно оптимально распределить ресурсы.

Классический критерий оптимизации обычно принимают в следующем виде /4/:

$$I_0 = M[l_1(Y, t_k)] + M \int_{t_0}^{t_k} (L(Y, \tau) + u^T(\tau) K^{-1} u(\tau)) d\tau,$$

где $L(Y, t)$, $l_1(Y, t_k)$ – заданные положительно определенные функции, K – симметричная положительно определенная или диагональная матрица положительных коэффициентов. Считая данный функционал функционалом потерь в мультиструктурной системе, примем, что $l_1(Y, t_k) = 0$, функция L зависит не от управляемых величин, а от их дисперсий, а вместо обычной работы управляющих воздействий используется виртуальная:

$$I = \sum_{i=1}^n M \left[\int_{t_0}^{\infty} (\alpha_i \sigma_i(t) + A(\sigma_i(t), t)) dt \right] \quad (4)$$

Решая задачу оптимального управления мультиструктурной системой параллельного действия с данным функционалом, можно определить установившиеся оптимальные значения дисперсий выходных величин. Для этого необходимо решить совместно систему, включающую, уравнения (2), определение (3) и критерий (4)

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{b_i}{2\sigma_i^5} (y-y_{ycm})^2 - \frac{b_i}{2\sigma_i^3} - \frac{a_i}{\sigma_i^3} (y-y_{ycm}) \right) e^{-\frac{(y-y_{ycm})^2}{2\sigma_i^2}} = u_i(y_i) \\ A_i(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_i(y_i)}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-y_{ycm})^2}{2\sigma_i^2}} dy, \quad i=1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n [\alpha_i \sigma_i + A_i(\sigma_i)] \rightarrow \min \end{cases} \quad (5)$$

Продифференцировав последнее уравнение по всем σ_i и, приравняв, эти производные нулю, получим новую систему из n уравнений, в неё подставим выражение виртуальной работы из второго уравнения системы (5), в которую в свою очередь подставлено управляющее воздействие из первого уравнения системы (5). Окончательно получим n уравнений вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left\{ \frac{1}{\sigma_i} \left[\frac{b_i}{2\sigma_i^5} (y - y_{уст})^2 - \frac{b_i}{2\sigma_i^3} - \frac{a_i}{\sigma_i^3} (y - y_{уст}) \right] e^{-\frac{(y - y_{уст})^2}{\sigma^2}} \right\} dy = -2\pi\alpha_i$$

$$i = 1, \dots, n$$

Решение этих уравнений определяет оптимальные нормы для дисперсий. Дальнейшее управление можно свести к работе конечного автомата, который будет перебрасывать управляющие ресурсы с «благополучных» структур на «не благополучные» (то есть на те структуры, дисперсия выходных величин которых больше всего возросла). Все варианты распределения управляющих воздействий (состояний конечного автомата) можно описать следующей матрицей:

$$\Delta U = \begin{Bmatrix} - , \Delta u_{12}, \dots, \Delta u_{1n} \\ \Delta u_{21}, - , \dots, \Delta u_{2n} \\ \dots \\ \Delta u_{n1}, \Delta u_{n2}, \dots, - \end{Bmatrix}.$$

Здесь номера столбцов соответствуют номерам структур, с которых управляющие ресурсы «снимаются», а номера строк соответствуют номерам структур, на которые управляющие воздействия направляются. Чертой помечены не используемые состояния.

Так будет работать система, у которой каждая структура имеет независимый источник управляющего воздействия. При общем источнике параллельная система может превратиться в последовательную (как отмечено выше). В этом случае управляющие ресурсы в любой момент времени подключаются автоматом лишь к одной структуре. Тогда можно применить теорию систем случайной структуры и, вычислив вероятности включения каждой структуры, использовать их в качестве уставок для конечного автомата (превратив тем самым автомат Мура в автомат Милли с обратной связью), что увеличит точность работы системы.

Таким образом, на каждом иерархическом уровне матричной структуры производится либо выбор одной адекватной обстоятельствам структуры, либо перераспределение ресурсов при параллельной работе некоторых, или всех структур уровня.

Список использованных источников

1. Казаков И.Е., Артемьев В.М. Оптимизация динамических систем случайной структуры.- М.: Наука, 1980 г. – 384 с.
2. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. - М.: Изд-во МГТУ им. И.Э. Баумана, 1999г. - 448с.
3. Тихонов А.К., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977.-736с.
4. Справочник по теории автоматического управления. - М.: Наука, 1987.-712с.