В.М. Кушнаренко, С.П., Беридзе

# СВОБОДНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

**Исследуются колебания стержня защемленного у широкого конца и свободного у узкого. Решение получено в виде разложения в ряд по ортогональной системе функций, выраженных через функции Бесселя**

Конические элементы, совершающие продольные колебания, встречаются в рамах крепления двигателей, в колонах строительных сооружений, поддерживающие перекрытия, на которых установлены неуравновешанные агрегаты, при устройстве подвесов и т.д .

Задачи подобного типа обычно решаются приближенно методом Бубнова-Галеркина /1/. В данной работе задача решается аналитически методом Фурье, что не только увеличивает точность и общность решения, но и расширяет возможность его теоретического исследования.

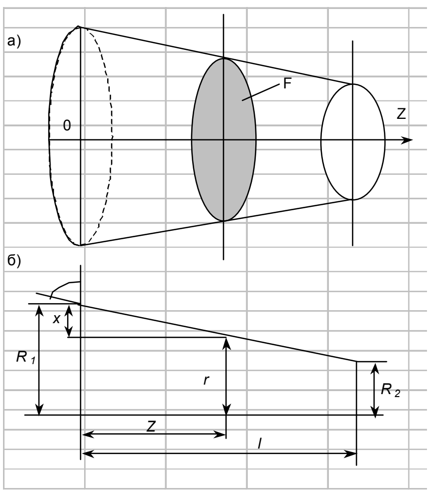


Рис. 1

Рассмотрим стержень, имеющий форму усеченного конуса. Его левый широкий конец закреплен, а правый узкий свободный (рис.1а). Уравнение продольных колебаний возьмем в виде. (см /1/)

$$\rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial z}(EF\frac{\partial u}{\partial z}), \qquad (1)$$

Здесь *u (z, t)* – перемещение сечения с координатой z; *F*- площадь поперечного сечения стержня с координатой z, (рис 1а).

$$F=\pi r^2 \text{, а } r=r(z). \qquad (2)$$

*r* – радиус поперечного сечения стержня; *E* – модуль упругости материала;

*с* – масса единицы объема; *l* – длина стержня; *б* – угол наклона образующей конической поверхности стержня; $R_1$ – радиус ее широкого основания; $R_2$ – радиус узкого.

Из рис 1б следует

$$x=\frac{z}{tg\alpha},\ tg\alpha=\frac{l}{R_1-R_2} \qquad (3)$$

Далее

$$r=R_1-x=R_1-\frac{z}{tg\alpha}=\frac{lR_1-z(R_1-R_2)}{l}, \qquad (4)$$

но

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}=-\frac{2\pi(R_1-R_2)r}{l} \qquad (5)$$

Перепишем (1) в виде

$$\rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=E\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}+FE\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \qquad (6)$$

Решение (1) ищем в виде

$$u=w(z)sin(щt+e) \qquad (7)$$

Подставив (2),(5),(7) в (6) получим

$$-\rho\pi r^2\omega^2 w=-E\frac{2\pi(R_1-R_2)}{l}r\frac{dw}{dz}+E\pi r^2\frac{d^2w}{dz^2}$$

или

$$r\frac{d^2w}{dz^2}-\frac{2(R_1-R_2)}{l}\frac{dw}{dz}+\frac{\rho\omega^2}{E}rw=0 \qquad (8)$$

Подставив (4) в (8), получим

$$w''-\frac{2(R_1-R_2)}{lR_1-z(R_1-R_2)}w'+\frac{\rho\omega^2}{E}w=0$$

Положим
$R_1$-$R_2$=a , $lR_1$=b,

тогда

$$w''-\frac{2a}{b-za}w'+\frac{\rho\omega^2}{E}w=0 \qquad (9)$$

Сделаем в (9) замену переменных.
b-za=y,
тогда

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{dy}\frac{dy}{dz}=-a\frac{dw}{dy},$$

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\left(\frac{dw}{dz}\right)'_y\cdot\frac{dy}{dz}=a^2\frac{d^2w}{dy^2},$$

$$p^2=\frac{\rho\omega^2}{E(R_1-R_2).}$$

Окончательно

$$yw''+2w'+p^2yw=0 \qquad (10)$$

или

$$y^2w''+2yw'+p^2y^2w=0 \qquad (11)$$

Уравнение (11) представляет из себя уравнение, приводящее к уравнению Бесселя. Его решение имеет вид (см. /4/).

$$w=C_1y^{-1/2}J_{1/2}(py)+C_2y^{-1/2}J_{-1/2}(py) \qquad (12)$$

Здесь $J_{1/2}(py)$ – функция Бесселя первого рода порядка ? , аналогично $J_{-1/2}(py)$ – то же самое порядка –? .

Покажем, что решение уравнение (11) может быть получено и в элементарных функциях.

Легко проверить, что

$$w=C_1y^{-1}sin\,py+C_2y^{-1}cos\,py \qquad (13)$$

является решением уравнения (10) или уравнения (11)

Граничные условия для данной задачи имеют вид (см /2/):

На закрепленном конце

при z=0 w=0, (14)

На свободном конце нормальная сила

$$N=EF\frac{dw}{\partial z}=0 \text{ т.е.}$$

при z=$l$ $\frac{dw}{dz}=0$ (15)

Так как y=$lR_1$-z($R_1$-$R_2$), то
при z=0 y=$lR_1$,
при z=$l$y=$lR_2$

Значит граничные условия (14) и (15) можно переписать в виде:

при y=$lR_1$ w=0 (16)

при y=$lR_2$ $\frac{dw}{dy}=0$ (17)

Подставим (13) в (16) и (17), получим

$$\begin{cases} C_1(lR_1)^{-1}\sin(plR_1)+C_2(lR_1)^{-1}\cos(plR_1)=0 \\ C_1[-(lR_2)^{-2}\sin(plR_2)+(lR_2)^{-1}p\cos(plR_2)]-C_2[(lR_2)^{-2} \\ \cos(plR_2)+(lR_2)^{-1}p\sin(plR_2)]=0 \end{cases} \qquad (18)$$

Система (18) имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю, то есть:

$$(lR_1)^{-1}\sin(plR_1)\cdot[(lR_2)^{-2}\cos(plR_2)+(lR_2)^{-1}p\sin(plR_2)]+$$
$$+(lR_1)^{-1}\cos(plR_1)[-(lR_2)^{-2}\sin(plR_2)+(lR_2)^{-1}p\cos(plR_2)=0 \qquad (19)$$

Уравнение (19) и будет уравнением частот для данной задачи.

Корни уравнения (19) $p_1$, $p_2$,….$p_к$,…. – характеристические числа, через которые определяется частоты колебаний стержня.

Из первого уравнения системы (18) получаем.

$$\frac{C_{2k}}{C_{1k}} = -\frac{sin(\ p_k lR_1\ )}{cos(\ p_k lR_1\ )} = -tg(\ p_k lR_1\ ),$$

откуда

$C_{2k}$=-$C_{1k}$tg($p_k$l$R_1$) .

Подставляем $C_{2к}$ в (13), получим

$$w_k=C_{1k}y^{-1}[sin(p_ky)-tg(p_klR_1) \quad cos(p_ky)]=C_{1k}Z_k(p_ky) \tag{20}$$

Постоянные $C_{1к}$ и $?_к$ определяются из начальных условий:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } t=0 \qquad u=ц(?) \\ &\frac{\partial u}{\partial t} = \Psi(y) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Очевидно, что $Z_k(p_ky)$ удовлетворяет уравнению (11), т.е.

$$y^2Z_k''+2yZ_k'+p_k^2y^2Z_k=0$$

или $$(\,y^2Z_k\,'\,)\,'+p_k^2y^2Z_k=0$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} (y^2Z_n')'+p_n^2y^2Z_n=0 \\ (y^2Z_m')'+p_m^2y^2Z_m=0 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} Z_m \\ Z_n \end{array}$$

Умножив первое уравнение на $Z_m$, а второе на $Z_n$, получим

$$\begin{cases} (y^2Z_n')'Z_m+p_n^2y^2Z_nZ_m=0 \\ (y^2Z_m')'Z_n+p_m^2y^2Z_mZ_n=0. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое, получим

$$y^2(p_m^2-p_n^2)Z_mZ_n=(y^2Z_m')Z_n-(y^2Z_n')Z_m$$

Умножив это равенство на dy и проинтегрируем от $l$$R_2$ до $l$$R_1$, правую часть проинтегрируем по частям, получим

$$(\,p_m^{\,2}-P_n^{\,2}\,)\int_{lR_2}^{lR_1} y^2Z_mZ_ndy = Z_nZ_m\,'\,y^2\Big|_{lR_2}^{lR_1} - Z_mZ_n\,'\,y^2\Big|_{lR_2}^{lR_1}$$

С учетом граничных условий (16) и (17) имеем

$$(\,p_m^{\,2}-p_n^{\,2}\,)\int_{lR_2}^{lR_1} y^2Z_mZ_ndy=0 \quad \text{при} \quad m\neq n$$

Откуда следует, что система $\{Z_n\}$ ортогональна на отрезке [$l$$R_2$,$l$$R_1$] с весом $y^2$. Для определения постоянных $C_{1к}$ и $?_к$ решение уравнения (1), которое теперь имеет вид

$$u=\sum_{k=1}^{\infty} C_{1k}Z_k(\,p_k y\,)\,sin(\,\omega_k t+\varepsilon_k\,),$$

подставим в (21), получим

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} C_kZ_k(\,p_k y\,)\,sin\,\varepsilon_k = \varphi(\,y\,) \\ &\sum_{k=1}^{\infty} C_kZ_k(\,p_k y\,)\omega_k\,cos\,\varepsilon_k = \Psi(\,y\,) \end{aligned}\right\}$$

Умножив оба равенства на $y^2Z_k(p_ky)$ и проинтегрируем от $l$$R_2$ до $l$$R_1$, тогда

$$\left.\begin{aligned} &C_k\,sin\,\varepsilon_k\int_{lR_2}^{lR_1} y^2Z_k^2(\,p_k y\,)dy = \int_{lR_2}^{lR_1} y^2\varphi(\,y\,)Z_k(\,p_k y\,)dy \\ &C_k\omega_k\,cos\,\varepsilon_k\int_{lR_2}^{lR_1} y^2Z_k^2(\,p_k y\,)dy = \int_{lR_2}^{lR_1} y^2\Psi(\,y\,)Z_k(\,p_k y\,)dy \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &C_k sine_k A_k=B_k \\ &C_k щ_k cose_k A_k=D_k \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_k = arctg\,\frac{\omega_k B_k}{D_k} \\ &C_k^2 = \frac{B_k^2}{A_k^2}+\frac{D_k^2}{\omega_k^2A_k^2} \end{aligned}\right\}$$

В работе /5/ .доказано, что решение уравнения свободных колебаний, которое удовлетворяет данным начальным условиям для смещений и скоростей является однозначно определенным, откуда следует, что общее решение можно получить как через (12), так и через (13) и, что они будут сводимы друг к другу. Ряды, которыми определяются функции Бесселя, сходятся при любом аргументе и допускают двукратное дифференцирование (см. /6/), следовательно и полученное решение рассматриваемого уравнения обладает указанным свойством и действительно является решением уравнения (1).

Полнота полученных решений вытекает, из того, что они выражаются через полные системы ортогональных функций (см. /3/).

**Список использованной литературы**

1.Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560с.
2.Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1972. 416 с.
3.Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
4.Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965. 424 с.
5.Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1935. 676.
6.Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 424 с.