В.В. Липилина

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ ТИПА АБЕЛЯ-ГОНЧАРОВА

Материал статьи относится к важному разделу теории аналитических функций – интерполяционным задачам. В этой области используются полиномы Абеля-Гончарова , т.е. аппарат, разработанный в 30е годы В. Л. Гончаровым. основные свойства много-членов Абеля-Гончарова изучены в работах Помье (1968 г.), Бухгольца (1970 г.), Шаффа (1972 г.).

В данной статье рассмотрена справедливость аналогичных свойств многочленов для фиксированного произвольного ć, 0<ć<∞,θ распространены основные свойства, изученные в работах Помье и Бухгольца на многочлены, определённые условием:

$$\mathrm{B}_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{k})}(z_k)=\begin{cases}0, & k\neq m,\\ 1, & k=m.\end{cases}$$

Ещё в работах Помье (1968г.), а затем в работах Бухгольца для функции $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ рассматривались функции $f_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty}a_k z^{k-n}$ и многочлены n-й степени $Q(z)$, определённые соотношением

$$Q_m(z_m)=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 1, & m=n.\end{cases}$$

Можно определить при фиксированном $\acute{c}$, $0=\acute{c}<\infty$, обобщённую производную соотношением

$$(z^k)'=\begin{cases}k^{\gamma}z^{k-1}, & k>0\\ 0, & k=0\end{cases}$$

и тогда рассматривать функции $f_n(z)$ как производные.

В этой работе удалось распространить основные свойства, изученные в работах Помье и Бухгольца на многочлены, определённые условием:

$$B_m^{(k)}(z_k)=\begin{cases}1, & k\neq m,\\ 0, & k=m.\end{cases}$$

В статье Бухгольца и Шаффа (апрель, 1972 год) “Нули частичных сумм и остатков бесконечного ряда” исследуется связь между порядком роста аналитической функции $f(z)$ и поведением последовательностей $\{s_n(f)\}$ и $\{r_n(f)\}$.

Для всякой функции

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k \tag{1}$$

рассматриваются функции

$$f_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty}a_k z^{k-n} \tag{2}$$

и величины

1) $S_n(f)=\max_l|z_l|$, где z_l – нули n-ой частичной суммы.

2) $r_n(f)=\max_i|t_i|$, где $f_n(t_i)=0$ – нули нормализованного остатка.

3) $\forall\,\{R_n\}$ – неубывающая последовательность положительных чисел таких, что $\lim_{n\to\infty}\frac{R_{n+1}}{R_n}=1$

$$\tau_n(f)=\lim_{n\to\infty}\sup|a_nR_1R_2\cdots R_n|^{\frac{1}{n}}$$

(R – тип функции $f(z)$ по $\{R_n\}$).

Авторы статьи показали, что существует такая абсолютная постоянная P, для которой справедливы неравенства (точные!)

$$\tau_n(f)\liminf\frac{S_n(f)}{R_n}\leq P \tag{3}$$

и

$$\tau_n(f)\limsup\frac{r_n(f)}{R_n}\geq\frac{1}{P} \tag{4}$$

Таким образом, существует глубокая связь между $ф_n(f)$, $S_n(f)$ и $r_n(f)$.

Функции $ц^n f(z)$ можно рассматривать как обобщённые ? – производные (при $г$ = 0) [3], определённые соотношением 0? $г$ <8

$$(Z^k)'=\begin{cases}k^{\gamma}z^{k-1}, & при\ k>0,\\ 0, & при\ k=0.\end{cases}$$

(для $\acute{c}$ = 1 это будет обычная операция дифференцирования).

Основные результаты Бухгольца и

Шаффа получены с помощью многочленов типа Абеля-Гончарова [3], поэтому естественно появилось желание обобщить или рассмотреть справедливость аналогичных свойств многочленов для фиксированного произвольного ć, $0 \le \gamma < \infty$.

Введём обозначения.

Обозначим через $A_{\gamma, r}$ класс функций $f(z)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^n}{v_n^{\gamma}},\quad v_n=\prod_{i=1}^{n}R_i,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}\le r,\quad 0<r<\infty.\quad f^{(k)}(z_k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^{n-k}}{v^{\gamma}_{(n-k)!}}$$

$B_n(z)$- полином, аналогичный полиномам Абеля-Гончарова, определим условиями:

$$B_k^{(n)}(z_n)=\begin{cases}0, & n\ne k,\\ 1, & n=k.\end{cases}\quad (k=0,1,2,...) \qquad (1.1)$$

Этими условиями многочлены определяются однозначно.

Замечание. Пусть $\{z_k\}_0^{\infty}$ - произвольная последовательность чисел. Тогда $f(z)$ разлагается в ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f^{(k)}(z_k)\cdot B_k(z;z_0,\ldots,z_{k-1})$$

при условии допустимости перестановки порядка суммируемости.

Справедливость этого разложения будет доказана ниже.

Свойства многочленов:

1°. Всякий многочлен $B_n(z)$ можно представить в виде определителя:

$$B_n(z)=\begin{vmatrix} 1 & \frac{z_0}{1!^{\gamma}} & \frac{z_0^2}{2!^{\gamma}} & \cdots & \frac{z_0^n}{n!^{\gamma}}\\ 0 & 1 & \frac{z_1}{1!^{\gamma}} & \cdots & \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!^{\gamma}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots\ 0\ 1 & z_{n-1}\\ 1 & \frac{z}{1!^{\gamma}} & \frac{z^2}{2!^{\gamma}} & \cdots & \frac{z^n}{n!^{\gamma}}\end{vmatrix}. \qquad (1.2)$$

Обобщённое дифференцирование $B_n(z)$ сводится к дифференцированию последней строки, поэтому $B_n^{(k)}(z_k)=0$, $(k<n)$, т. к. в определителе совпадают $(k+1)$-я и последняя строки. При $k=n$ равенство $B_n^{(k)}(z_k)=1$ очевидно (определитель имеет ступенчатый вид).

1°. $B_n(z)$ зависит фактически ещё от z_0, z_1, z_2, …, z_{n-1}, т. е. Можно писать: $B_n(z)=B_n(z;$ z_0, z_1, z_2, …, $z_{n-1})$.

2°. $B_n(z_0;\ z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1})=0$.

Это тождество очевидно, т.к. в определителе (1.2) совпадают первая и последняя строки.

3°. ?ля $B_n(z;\ z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_{n-1})$ справедливо рекуррентное соотношение:

$$B_n(z;\ z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_{n-1})=$$

$$=\frac{z^n}{n!^{\gamma}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z_k^{\,n-k}}{(n-k)!^{\gamma}}B_k(z;\,z_0,\ldots,z_{k-1})\,. \qquad (1.3)$$

Доказательство:

Справедливость (1.3) следует из разложения $\frac{z^n}{n!^{\gamma}}$ по многочленам $\{B_k(z)\}$.

$$\frac{z^n}{n!^{\gamma}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{z_k^{\,n-k}}{(n-k)!^{\gamma}}B_k(z), \qquad (1.4)$$

которое легко проверяется, если продифференцировать это равенство k раз и использовать условие (1.1)

в точке z_0:

$$\frac{z_0^{\,n}}{n!^{\gamma}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{z_0^{\,n-0}}{(n-0)!^{\gamma}}B_0(z)=\frac{z_0^{\,n}}{n!^{\gamma}}\cdot 1=\frac{z_0^{\,n}}{n!^{\gamma}}\quad;$$

в точке z_1 находим I-ю производную:

$$\frac{z_1^{\,n-1}}{(n-1)!^{\gamma}}=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z_k^{\,n-k}}{(n-k)!^{\gamma}}B_k(z)\right)'=\left(\frac{z_0^{\,n}}{n!^{\gamma}}B_0(z)\right)'+\left(\frac{z_1^{\,n-1}}{(n-1)!^{\gamma}}B_1(z)\right)'+\ldots$$

$$\ldots+\left(B_n(z)\right)'=0+\frac{z_1^{\,n-1}}{(n-1)!^{\gamma}}\cdot 1+0+\ldots+0=\frac{z_1^{\,n-1}}{(n-1)!^{\gamma}};$$

и так далее, в точке z_k находим k-ю производную:

$$\frac{z_k^{\,n-k}}{(n-k)!^{\gamma}}=\left(\frac{z_0^{\,n}}{n!^{\gamma}}B_0(z)\right)^{(k)}+\ldots+\left(\frac{z_k^{\,n-k}}{(n-k)!^{\gamma}}B_k(z)\right)^{(k)}+\ldots+\left(B_n(z)\right)^{(k)}=$$

$$=0+\ldots+\frac{z_k^{\,n-k}}{(n-k)!^{\gamma}}\cdot 1+\ldots+0=\frac{z_k^{\,n-k}}{(n-k)!^{\gamma}}.$$

Равенство (1.4) верно.

4° для любого k, $0\le k\le n$

$B_n^{(k)}(z;\ z_0,\ \ldots,\ z_{n-1})=B_{n-k}(z;\ z_k,\ \ldots,\ z_{n-1})$, (1.5)

отсюда получаем аналог формулы Тейлора для многочлена.

$$B_n(z;\ z_0,\ \ldots,\ z_{n-1})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}B_{n-k}(0;z_k,\cdots,z_{n-1})\frac{z^k}{k!^{\gamma}}. \qquad (1.6)$$

Доказательство:

Доказательство этой формулы такое же, как для обычной формулы Тейлора для многочлена, только берём г-производные.

Представим $B_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k z^k}{k!^\gamma}$, то, последовательно дифференцируя его k-раз:

$$B_n^{(1)}(z)=B_{n-1}(z;\,z_1,\ldots,z_{n-1})=a_1+\frac{a_2 z}{1!^\gamma}+\ldots+\frac{a_n z^{n-1}}{(n-1)!^\gamma};$$

$$B_n^{(2)}(z)=B_{n-2}(z;\,z_2,\ldots,z_{n-1})=a_2+\frac{a_3 z}{1!^\gamma}+\ldots+\frac{a_n z^{n-2}}{(n-2)!^\gamma};$$

....

$$B_n^{(k)}(z)=B_{n-k}(z;\,z_k,\ldots,z_{n-1})=a_k+\frac{a_{k+1} z}{1!^\gamma}+\ldots+\frac{a_n z^{n-k}}{(n-k)!^\gamma}.$$

и полагая во всех этих формулах z=0, найдём выражение коэффициентов многочлена через значения самого многочлена и его производных при z=0.

Итак, $a_0=B_n(0;\,z_0,\,\ldots,\,z_{n-1})$
$a_1=B_{n-1}(0;\,z_1,\,\ldots,\,z_{n-1})$
....
$a_k=B_{n-k}(0;\,z_k,\,\ldots,\,z_{n-1})$

и поэтому

$$B_n(z)=\sum_{k=0}^{n}B_{n-k}(0;\,z_k,\cdots,z_{n-1})\cdot\frac{z^k}{k!^\gamma}.$$

Формула (1.6) доказана.

5⁰. Полином $B_n(0;\,z_0,\,\ldots,\,z_{n-1})$ и $B_n(z;\,z_0,\,\ldots,\,z_{n-1})$ однородные функции n-ой степени относительно своих переменных, т. е.

$$B_n(0;\lambda z_0,\ldots,\lambda z_{n-1})=\lambda^n B_n(0;z_0,\ldots,z_{n-1})$$
$$B_n(\lambda z;\lambda z_0,\ldots,\lambda z_{n-1})=\lambda^n B_n(z;z_0,\ldots,z_{n-1}) \qquad (1.7)$$

Доказательство:

Это тождество доказывается простой индукцией. Свойство очевидно при n=0. Предположим, что свойство верно для n=0, 1, …, k, т. е. верны равенства:

$$B_k(0;\lambda z_0,\ldots,\lambda z_{k-1})=\lambda^k B_k(0;z_0,\ldots,z_{k-1})$$
$$B_k(\lambda z;\lambda z_0,\ldots,\lambda z_{k-1})=\lambda^k B_k(z;z_0,\ldots,z_{k-1})$$

и докажем, что свойство верно для n=k+1, т.е. справедливо для любого n. Однородность $B_n(0;\,z_0,\,\ldots,\,z_{n-1})$ легко получить из (1.3) при z=0, т. к.

$$B_n(0;\,z_0,\,\ldots,\,z_{n-1})=$$
$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z_k^{n-k}}{(n-k)!^\gamma}B_k(0;z_0,\ldots,z_{k-1});$$

тогда:

$$B_n(0;\,\lambda z_0,\cdots,\lambda z_{n-1})=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda z_k)^{n-k}}{(n-k)!^\gamma}B_k(0;\lambda z_0,\ldots,\lambda z_{k-1})=$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda z_k)^{n-k}}{(n-k)!^\gamma}\cdot\lambda^k\cdot B_k(0;z_0,\ldots,z_{n-1})=$$

$$=-\lambda^n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z_k{}^{n-k}}{(n-k)!^\gamma}B_k(0;z_0,\ldots,z_{k-1})=\lambda^n\cdot B_n(0;z_0,\ldots,z_{n-1}).$$

Однородность $B_n(z;\,z_0,\,\ldots,\,z_{n-1})$ будет очевидна из однородности $B_n(0;\,z_0,\,\ldots,\,z_{n-1})$ и свойства 4⁰.

$$B_n(z;\,z_0,\ldots,z_{n-1})=\sum_{k=0}^{n}B_{n-k}(0;\,z_k,\ldots,z_{n-1})\cdot\frac{z^k}{k!^\gamma};$$

$$B_n(\lambda z;\,\lambda z_0,\ldots,\lambda z_{n-1})=\sum_{k=0}^{n}B_{n-k}(0;\,\lambda z_k,\ldots,\lambda z_{n-1})\cdot\frac{(\lambda z)^k}{k!^\gamma}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\lambda^{n-k}\cdot B_{n-k}(0;\,z_k,\ldots,z_{n-1})\cdot\frac{\lambda^k z^k}{k!^\gamma}=$$

$$=\lambda^n\cdot\sum_{k=0}^{n}\cdot B_{n-k}(0;\,z_k,\ldots,z_{n-1})\cdot\frac{z^k}{k!^\gamma}=\lambda^n\cdot B_n(z;\,z_0,\ldots,z_{n-1})$$

Итак, формула (1.7) верна для любого n є N.

6⁰. Для многочлена $B_n(z;\,z_0,\,\ldots,\,z_{n-1})$ справедлива формула:

$$z^n\cdot B_n(\frac{1}{z},\,z_0,\ldots,z_{n-1})=\sum_{k=0}^{n}B_k(0;z_0,\ldots,z_{n-1})\frac{z^k}{k!^\gamma} \qquad (1.8)$$

Доказательство:

Используем формулу Тейлора для многочлена (1.6)

$$B_n(z;\,z_0,\,\ldots,\,z_{n-1})=\sum_{k=0}^{n}B_{n-k}(0;z_k,\ldots,z_{n-1})\frac{z^k}{k!^\gamma};$$

$$z^n\cdot B_n(\frac{1}{z},\,z_0,\ldots,z_{n-1})=\sum_{m=0}^{n}B_{n-m}(0;z_m,\ldots,z_{n-1})\frac{z^{n-m}}{(n-m)!^\gamma}$$

заменим n-m на k (0=k=n), тогда имеем:

$$z^n\cdot B_n(\frac{1}{z};\,z_0,\ldots,z_{n-1})=\sum_{k=0}^{n}B_k(0;z_0,\ldots,z_{k-1})\frac{z^k}{k!^\gamma}$$

7⁰. Для многочлена $B_n(z)$ справедлива формула $\forall\{z_k\},\,|z_k|\le 1$

$$B_n(z;z_0,\ldots,z_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-m}B_k(0;z_{k-1},\ldots,z_{n-1})\cdot B_{n-k}(z;z_0,\ldots,z_{m-1},0,\ldots,0). \qquad (1.9)$$

Доказательство:

Для доказательства применим аналог формулы Абеля-Гончарова для многочлена $B_n(z;z_0,\ldots,z_{n-1})$

$$B_n(z;z_0,\ldots,z_{n-1})=\sum_{k=0}^{n}B_n^{(k)}(w_k;z_0,\ldots,z_{n-1})\cdot B_k(z;w_0,\ldots,w_{k-1})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}B_{n-k}(w_k;z_k,\ldots,z_{n-1})\cdot B_k(z;w_0,\ldots,w_{k-1}) \qquad (a)$$

где $\{w_k\}_0^n$ - любые.

В справедливости этой формулы легко убедиться почленным дифференцированием, как это делается при выводе обычной формулы Тейлора, учитывая свойство 4?.

Если в (а) положить

$$w_k=\begin{cases}z_k,\text{если}\,0\le k<m\\0,\text{если}\,m\le k<n\end{cases},$$

то получим:

$$B_n(z;z_0,...,z_{n-1})=$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1}B_{n-k}(z_k;z_k,...,z_{n-1})\cdot B_k(z;z_0,...,z_{k-1})+$$
$$+\sum_{n=m}^{n}B_{n-k}(0;z_k,...,z_{n-1})\cdot B_k(z;z_0,...,z_{m-1},0,...,0)=$$
$$=\sum_{k=m}^{n}B_{n-k}(0;z_k,...,z_{n-1})\cdot B_k(z;z_0,...,z_{m-1},0,...,0)$$

Заменим k на n-k, тогда получим (при этом поменяли порядок слагаемых (от m=0 до m=n)).

$$B_n(z;z_0,...,z_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-m}B_k(0;z_k,...,z_{k-1})\cdot B_{n-k}(z;z_0,...,z_{m-1},0,...,0).$$

Справедливость формулы доказана.

8°. Пусть

$$H_n(\gamma)=\max_{\substack{\{z_k\}_{k=0}^{n-1}\\ |z_k|=1}}|B_n(0;z_0,...,z_{n-1})| \qquad (1.10)$$

тогда справедливо $\forall_m, 0\le m\le n$ неравенство

$$H_n(\gamma)\ge H_{n-m}(\gamma)\cdot H_m(\gamma)$$

Доказательство:

Неравенство очевидно при m=0 и m=n, т.к. $H_0(г)$=1. Предположим, что 0<m<n и выберем $\{z_k\}_0^{n-1}$ при $|z_k|=1$ такими, что

$$H_m(\gamma)=|B_m(0;z_0,...,z_{m-1})| \text{ и } H_{n-m}(\gamma)=|B_{n-m}(0;z_m,...,z_{n-1})|$$

(при фиксированном m это возможно, т.к. переменные разделились).

Ясно, что $H_n(\gamma)\ge\max\limits_{|\lambda|\le1}|B_n(0;\lambda z_0,...,\lambda z_{m-1},z_m,...,z_{n-1})|$.

Но вследствии (1.7) и (1.9) получим

$$B_n(0;\lambda z_0,...,\lambda z_{m-1},z_m,...,z_{n-1})=$$
$$=\sum_{k=m}^{n}B_{n-k}(0;z_k,...,z_{n-1})\cdot\lambda^k B_k(0;z_0,...,z_{m-1},0,...,0)=\lambda^m Q(\lambda),$$

где $Q(л)$ - многочлен от $л$ со свободным членом $B_{n-m}(0;z_m,...,z_{n-1})\cdot B_m(0;z_0,...,z_{m-1})$.

Следовательно,

$$H_n(\gamma)\ge\max_{|\lambda|=1}|\lambda^m Q(\lambda)|=\max_{|\lambda|=1}|Q(\lambda)|\ge|Q(0)|=H_{n-m}(\gamma)\cdot H_m(\gamma).$$

9°. Существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}H_n^{\frac{1}{n}}(\gamma)=\sup_{0\le j<\infty}H_j^{\frac{1}{j}}(\gamma)$$

Доказательство:

Пусть j?1 фиксировано, и n=q·j+l, 0<l<j, тогда по (1.10) имеем

$$H_n(\gamma)\ge H_{g\cdot j}(\gamma)\cdot H_e(\gamma)\ge H_j^{\,q}(\gamma)\cdot H_j^{\frac{-e}{jn}}(\gamma)$$

и устремляя n>?, получим (учитывая, что $H_j(\gamma)\ge1$ и $\frac{l}{jn}<\frac{1}{n}\to0$)

$$\liminf_{n\to\infty}H_n^{\frac{1}{n}}(\gamma)\ge H_j^{\frac{1}{j}}(\gamma),$$

отсюда

$$\liminf_{n\to\infty}H_n^{\frac{1}{n}}(\gamma)=\sup H_j^{\frac{1}{j}}(\gamma),$$

отсюда имеем неравенство:

$$\lim_{n\to\infty}H_n^{\frac{1}{n}}(\gamma)=\sup_{0\le j<\infty}H_j^{\frac{1}{j}}(\gamma)$$

и т.д.

10°. При любых $\{z_k\},|z_k|\le1$ многочлен $B_n(z)$ удовлетворяет неравенству:

$$|B_n(z)|\le H_n(\gamma)\cdot A(|z|) \qquad (1.11),$$

где

$$A(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_k}{H_k(\gamma)k!^\gamma},\quad A(z)\in A_{\gamma,r}.$$

Доказательство:

Воспользуемся формулами (1.6) и (1.10)

$$|B_n(z)|\le\sum_{k=0}^{n}|B_{n-k}(0;z_k,...,z_{n-1})|\cdot\frac{|z|^k}{k!^\gamma}\le\sum_{k=0}^{n}H_{n-k}(\gamma)\cdot\frac{|z|^k}{k!^\gamma}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{H_n(\gamma)}{H_k(\gamma)}\cdot\frac{|z|^k}{k!^\gamma}=$$
$$=H_n(\gamma)\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{H_k(\gamma)\cdot k!^\gamma}<H_n(\gamma)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{H_k(\gamma)k!^\gamma}.$$

Введем лемму:

ЛЕММА. Если $f(z)\in A_{r,\gamma}$, то при $|z_k|\le1$, и любом $\varepsilon>0$

$$|f^{(n)}(z_n)|\le(r+\varepsilon)^n\cdot\varphi[(r+\varepsilon)],$$

где

$$\varphi[(r+\varepsilon)]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(r+\varepsilon)^m}{m!^\gamma}.$$

Доказательство:

$$f^{(n)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{n+k}}{k!^\gamma}z^k.$$

Согласно этой формулы и определения класса $A_{r,\gamma}$:

$$|f^{(n)}(z_n)|\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_{n+k}|}{k!^\gamma}\cdot|z_n|^k<\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r+\varepsilon)^{n+k}}{k!^\gamma}=(r+\varepsilon)^n\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r+\varepsilon)^k}{k!^\gamma},$$

т.е.

$$|f^{(n)}(z_n)|\le(r+\varepsilon)^n\cdot\varphi[(r+\varepsilon)].$$

ТЕОРЕМА:

Если любая $f(z)\in A_{\gamma,r}$, то для любой последовательности $\{z_k\},|z_k|\le1$ ее можно разложить в ряд:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f^{(n)}(z_n)\cdot B_n(z;z_0,\dots,z_{n-1}), \qquad (*)$$

причем ряд сходится равномерно внутри области аналитичности функции $f(z)$.

Доказательство:

Т.к. $r<\frac{1}{H(\gamma)}$, то существует такое $\varepsilon>0$, что $r+\varepsilon<\frac{1}{H(\gamma)}$. Обозначим через $q=(r+e)\cdot H(г)$, тогда $0<q<1$.

По предыдущей лемме и оценке многочлена $B_n(z)$ (1.11) оценим теперь произведение

$$\left|f^{(k)}(z_k)\cdot B_k(z)\right|\le\left|(r+\varepsilon)^k\cdot\varphi(r+\varepsilon)\cdot H_k(\gamma)\cdot A(|z|)\right|=$$

$$=(r+\varepsilon)^k\cdot H^k(\gamma)\cdot\frac{H_k(\gamma)}{H^k(\gamma)}\cdot\varphi(r+\varepsilon)\cdot A(|z|)\le q^k\varphi(r+\varepsilon)A(|z|).$$

По признаку Вейерштрасса следует отсюда равномерная и абсолютная сходимость ряда (*) в любой замкнутой ограниченной области при **0<ć<∞**; причем ввиду абсолютной сходимости законны любые перестановки членов ряда, поэтому:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(k)}(z_k)\cdot B_k(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{(n-k)!^{\gamma}}z_k^{\,n-k}\right)\cdot B_k(z)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z_k^{\,n-k}}{(n-k)!^{\gamma}}B_k(z)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^n}{n!^{\gamma}}=f(z).$$

Теорема доказана.

Список использованной литературы

1. J.D.Buchholtz „The Whittacker Constant and Successive Derifativest of Entire Functions”. Journal of Approximation Theory N3, N2, 1970. (Стр.194-214).
2. J.D.Buchholtz and J.K.Shaw. „Zeros of partial Sums and Remainders of power Series”. Fransactions of the American Mathematical Society. N166, 1972 (Стр.269-284).
3. Ю.К.Суетин. „О постоянных сходимости и единственности некоторых интерполяционных задач”. Мат.сборник, т.65(107),N4,1965г. (Стр. 142-160.)
4. Ю.К.Суетин. Ст. „Некоторые свойства многочленов в задачах типа Абеля-Гончарова”. Сб.Труды III-ей Казахстанской межвузовской научной конференции по математике и механики. Изд. Алма-Ата, 1970 г. (Стр. 126-133.)

Статья поступила в редакцию 19. 06. 2000г.