А.П.Васильев, А.С.Павлов

УДАРНОЕ ПОВЫШЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ПРИ СХЛОПЫВАНИИ ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЬКА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ.

Рассматривается динамика кавитационного пузырька в вязкой изотермической жидкости под воздействием сил поверхностного натяжения, давления, инерции и вязкого трения . Получены расчетные соотношения для ударного повышения давления в жидкости, из которых следует, что в начальный момент времени на фронте ударной волны достигается давление более 3000 атм.

Уравнения динамики вязкой жидкости интегрировались численно методом Рунге-Кутта. Приводится сравнение результатов расчета с классической формулой Рэлея для времени схлопывания сферической полости в идеальной жидкости. Библ. 5, рис. 4.

Явление кавитации вот уже более ста лет привлекает неослабевающий интерес инженеров различных отраслей техники. С одной стороны, это связано со сложным характером физико-гидродинамических процессов, сопровождающих кавитацию, а с другой, - потребностью конструкторов в рациональном проектировании гидрооборудования [1]. В частности, особый интерес представляет защита элементов проточной части гидроагрегатов от кавитационной эрозии, а также различных кавитирующих поверхностей, например, гребных винтов.

Механизм кавитационной эрозии в настоящее время объясняют образованием в месте схлопнувшегося пузырька некоторого макрообъема, в котором в результате гидравлического удара кинетическая энергия жидкости перешла в упругую потенциальную энергию. Возникшая из-за этого неравновесная структура порождает ударную волну, взаимодействие которой с элементами конструкции гидроагрегата и приводит к выщербливанию металла, т.е. кавитационной эрозии [2].

Центральным вопросом в этой схеме кавитационной эрозии является определение ударного давления в жидкости в момент исчезновения парового пузырька.

Необходимо отметить, что гидродинамическая задача о схлопывании пузырька пара неоднократно рассматривалась различными авторами в рамках тех или иных допущений [3]. Классическим результатом в этой проблеме считается уравнение Рэлея и его решение для схлопывающейся в идеальной жидкости сферической полости:

$$\mathbf{T}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{\rho_1}{\Delta\mathbf{p}}}\,\mathbf{a}_0\mathbf{B}\left(\frac{5}{6},\frac{1}{2}\right), \qquad (1)$$

где T- время схлопывания сферической полости, r_1 *– плотность жидкости, Dp- неравновесный перепад давлений,* a_0*- начальный радиус сферы, B(x,y)-бета – функция.*

Представляет интерес, с целью расчета ударного давления, исследование динамики кавитационного пузырька с учетом всех сил, обуславливающих его схлопывание.

Для решения указанной задачи считаем пузырек сферическим в процессе схлопывания, а поле скоростей в окружающей жидкости сферически-симметричным [4].

Течение невесомой изотермической несжимаемой жидкости описывается обычными уравнениями неразрывности и импульсов:

$$\nabla\cdot(\rho_1\vec{\upsilon}_1)=0\ , \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}_1}{\partial\mathbf{t}}+(\vec{\upsilon}_1\cdot\nabla)\vec{\upsilon}_1=-\frac{1}{\rho_1}\nabla\mathbf{p}_1+\nu_1\nabla^2\vec{\upsilon}_1\ , \qquad (3)$$

Пар в пузырьке считается покоящимся, давление в котором однозначно определяется температурой по уравнению Клапейрона-Клаузиуса с учетом поправки на кривизну межфазной границы [5], причем теплота конденсации пара не меняет температуру жидкости.

Разместив сферическую систему координат {r,J,j} в центре пузырька и принимая во внимание одномерность сферически-симметричного поля скоростей жидкости $u_r(t,r)$, уравнения (2) и (3) преобразуем к виду:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\mathbf{r}^2\upsilon_\mathbf{r}\right)=0\ ,$$

$$\frac{\partial\upsilon_\mathbf{r}}{\partial\mathbf{t}}+\upsilon_\mathbf{r}\frac{\partial\upsilon_\mathbf{r}}{\partial\mathbf{r}}=-\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\mathbf{p}_1}{\partial\mathbf{r}}+\nu_1\left(\frac{1}{\mathbf{r}^2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(\mathbf{r}^2\frac{\partial\upsilon_\mathbf{r}}{\partial\mathbf{r}}\right)-\frac{2}{\mathbf{r}^2}\upsilon_\mathbf{r}\right)\ .$$

Из уравнения неразрывности следует, что $r^2u_r=const=a^2u_{1a}$, где а-радиус пузырька, u_{1a}- скорость жидкости на межфазной границе, поэтому поле скоростей в жидкой фазе имеет вид:

$$\upsilon_{\mathbf{r}}(\mathbf{r},\mathbf{t}) = \upsilon_{1\mathbf{a}}(\mathbf{t})\frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{r}^2} = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{t})}{\mathbf{r}^2} \qquad (4)$$

Подставляя (4) в уравнение Навье-Стокса и интегрируя его по радиусу, получим распределение давления по жидкой фазе вокруг пузырька:

$$\frac{\mathbf{p}_1}{\rho_1} = \mathbf{C} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}(\mathbf{a}^2\upsilon_{1\mathbf{a}})\frac{1}{\mathbf{r}} - \frac{1}{2}\mathbf{a}^4\upsilon_{1\mathbf{a}}{}^2\frac{1}{\mathbf{r}^4} . \qquad (5)$$

Для нахождения постоянной интегрирования обратимся к граничным

условиям на поверхности пузырька и на бесконечности [4]:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}: \quad \upsilon_{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{da}}{\mathbf{dt}} , \quad \sigma_{2\mathbf{a}}^{\mathbf{rr}} - \sigma_{1\mathbf{a}}^{\mathbf{rr}} = -2\frac{\Sigma}{\mathbf{a}} ,$$

$$\rho_1(\upsilon_{\mathbf{a}} - \upsilon_{1\mathbf{a}}) = \rho_{2\mathbf{a}}(\upsilon_{\mathbf{a}} - \upsilon_{2\mathbf{a}}) = \mathbf{j} ; \qquad (6)$$

$$\mathbf{r} = \infty : \quad \upsilon_1 = 0 , \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_\infty . \qquad (7)$$

Здесь s_{1a}^{rr} и s_{2a}^{rr}- нормальные напряжения на межфазной границе в жидкой и паровой фазах соответственно, S- коэффициент поверхностного натяжения, u_a- скорость межфазной границы, u_{2a}- скорость пара на межфазной границе $r_1=r_{1a}$ и $r_2=r_{2a}$- плотности жидкой и паровой фаз на межфазной границе, S- коэффициент поверхностного натяжения жидкой пленки.

Для нормальных компонент тензора поверхностных напряжений в соответствии с принятой моделью пара и жидкости можно записать:

$$\sigma_{2\mathbf{a}}^{\mathbf{rr}} = -\mathbf{p}_{2\mathbf{a}} = -\mathbf{p}_2(\mathbf{T}) = \mathbf{const} ,$$

$$\sigma_{1\mathbf{a}}^{\mathbf{rr}} = -\mathbf{p}_{1\mathbf{a}} + 2\mu_1\left(\frac{\partial \upsilon_{1\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{a}} = -\mathbf{p}_{1\mathbf{a}} - 4\mu_1\frac{\upsilon_{1\mathbf{a}}}{\mathbf{a}}$$

С учетом этих выражений и условий (6) и (7) из интеграла (5) получим

$$\frac{\mathbf{p}_{2\mathbf{a}} - \mathbf{p}_\infty}{\rho_1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\left(\mathbf{a}^2\upsilon_{1\mathbf{a}}\right)\frac{1}{\mathbf{a}} - \frac{1}{2}\upsilon_{1\mathbf{a}}^2 + 2\frac{\Sigma}{\rho_1\mathbf{a}} + 4\nu_1\frac{\upsilon_{1\mathbf{a}}}{\mathbf{a}} \quad (8)$$

При равновесии пузырька пара в своей жидкости всегда существует равновесный радиус, определяемый условием равенства сил:

$$\frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_{0,\infty}}{\rho_1} = 2\frac{\Sigma}{\rho_1\mathbf{a}_0}$$

Схлопывание пузырька начинается, когда во внешней среде появляется избыток статического давления dpГ, который удобно выразить через скачок давления на межфазной границе

$$\frac{\mathbf{p}_{2\mathbf{a}} - \mathbf{p}_\infty}{\rho_1} = \frac{\mathbf{p}_{2\mathbf{a}} - \mathbf{p}_{0,\infty}}{\rho_1} - \frac{\delta\mathbf{p}_\infty}{\rho_1} =$$

$$= 2\frac{\Sigma}{\rho_1\mathbf{a}_0} - 2\mathbf{k}\frac{\Sigma}{\rho_1\mathbf{a}_0} = 2(\mathbf{k}-1)\frac{\Sigma}{\rho_1\mathbf{a}_0}$$

где k-параметр возмущения давления, в дальнейшем k=const.

Считаем, что массовый поток пара в жидкость обусловлен только его конденсацией на движущейся межфазной границе, тогда $j/r_1=bu_a$, где $b=p_2/(r_1RmT)$, T-температура пара, Rm-удельная газовая постоянная, $p_{2a}=p_2(T)=const$.

Заменяя в уравнении (8) $u_{1a}=u_a- j/r_1=u_a(1-b)$, приведем это уравнение к виду:

$$\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{a}}{\mathbf{dt}^2} = -\frac{\frac{3}{2} - \beta - \frac{\beta^2}{2}}{1-\beta}\left(\frac{\mathbf{da}}{\mathbf{dt}}\right)^2\frac{1}{\mathbf{a}(\mathbf{t})} - 4\nu_1\left(\frac{\mathbf{da}}{\mathbf{dt}}\right)\frac{1}{\mathbf{a}^2(\mathbf{t})} -$$

$$-2\frac{\Sigma}{\rho_1\mathbf{a}^2(\mathbf{t})}\frac{1}{1-\beta} - 2(\mathbf{k}-1)\frac{\Sigma}{\rho_1\mathbf{a}(\mathbf{t})\mathbf{a}_0}\frac{1}{1-\beta} . \qquad (9)$$

Из этого уравнения при $b=n_1=0$ следует как частный случай уравнение Рэлея [3].

Если давление в паре $p_2<<p_{кр}$- критического, то количеством движения за счет конденсации пара можно пренебречь в силу малости величины b. Обычно эти условия имеют место во всасывающих патрубках насосов.

Уравнение (9) в силу его нелинейности может быть проинтегрировано численно, в частных случаях оно допускает аналитические решения, подобно решению Рэлея (1).

Задача Коши уравнения (9) может быть сформулирована так:

$$\mathbf{t} = 0 , \ \mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0 , \ \frac{\mathbf{da}}{\mathbf{dt}} = \upsilon_{\mathbf{a}} = 0 , \qquad (10)$$

т.е. схлопывание пузырька начинается из состояния покоя.

Ниже представлены результаты численного исследования динамики кавитационного пузырька. Интегрирование уравнения (9) проводилось методом Рунге-Кутта пятого порядка точности.

На рис.1 показаны графики зависимости времени схлопывающегося пузырька от текущего радиуса для различных значений параметра возмущения давления k={10,50,100}.

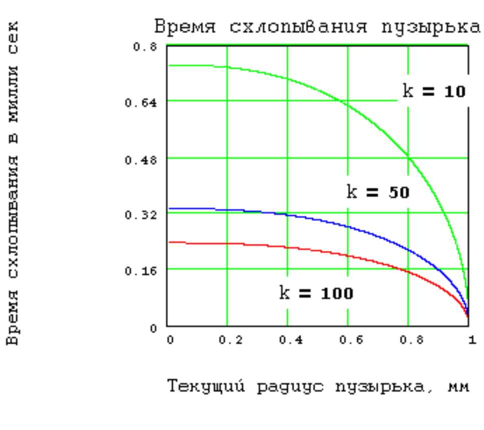

Рис. 1. Зависимость времени (мс) схлопывания парового пузырька от радиуса (мм) для раз-

личных значений параметра k внешнего возмущающего давления**.**

Пересечение графиков с осью абсцисс дает полное время схлопывания пузырька, чем больше возмущающее давление, тем меньше время схлопывания пузырька. Если при k=10 (давление 1,5 Па) время схлопывания составляет 0,75 мс, то при k=100 (давление 15 Па) оно снижаеся до 0,24 мс. Начальный радиус пузырька принимался равным 1 мм, а параметры воды и водяного пара соответствовали температуре 20^{0}C. Необходимо отметить, что формула Рэлея (1) дает очень близкие значение времени схлопывания лишь при k>>1, но уже при kJ1 расхождения начинает нарастать и при k=0.1 составляет более 20%.

На рис.2 приведены графики зависимости скорости межфазной границы от текущего значения радиуса схлопывающегося пузырька для различных значений параметра

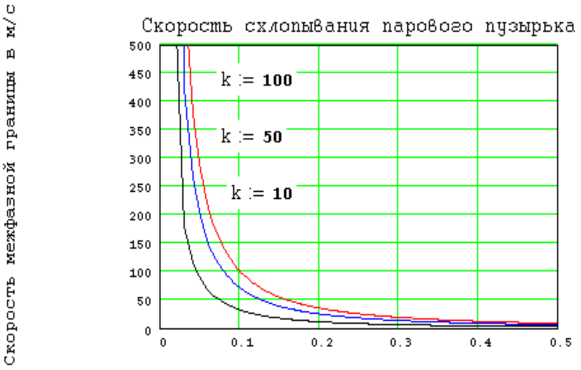

Рис.2. Зависимость скорости (м/с) схлопывания парового пузырька от текущего радиуса (мм) для различных значений параметра возмущения k.

Рисунок показывает, что весь процесс схлопывания пузырька условно можно разбить на две стадии: первая стадия $0,2a_0$***J a(t) Ja_0 характеризуется тем, что скорость межфазной границы при любом k почти линейно нарастает с уменьшением радиуса пузырька. На второй стадии 0Ja(t) J0,2a_0 скорость начинает очень резко нарастать, достигая значений ~сотен и более метров в секунду.***

При численном интегрировании именно этот участок приходилось проходить с очень мелким шагом по времени. Формально в точке a=0 нарушаются условия существования и единственности решения (в этой точке правая часть уравнения (9) становиться неограниченной), в связи с этим интегрирование заканчивалось не в нуле, а в точке $a_0/2*10^4$.

Такой подход имеет и термодинамическое обоснование [5]. Известно, что обратный процесс- образование и рост пузырей в насыщенной жидкости – происходит не с нулевого радиуса, а с некоторого критического, равного размеру зародыша будущего пузырька. Для всех меньших радиусов двухфазная система является термодинамически неустойчивой, поэтому наименьшим радиусом схлопывающегося пузырька следует считать не нулевой радиус, а критический.

При таком подходе были получены следующие значения скоростей схлопывания в момент исчезновения пузырька: u_a={88; 2294;7622;15911} м/с соответственно при k={0,1;10;50;100}.

При таких велинах течение жидкости становится сверхзвуковым и модель несжимаемой жидкости перестает перестает адекватно описывать реальный физический процесс.

На рис.3 приведены графики зависимости величины a^2u_a= A из уравнения неразрывности от текущего радиуса.

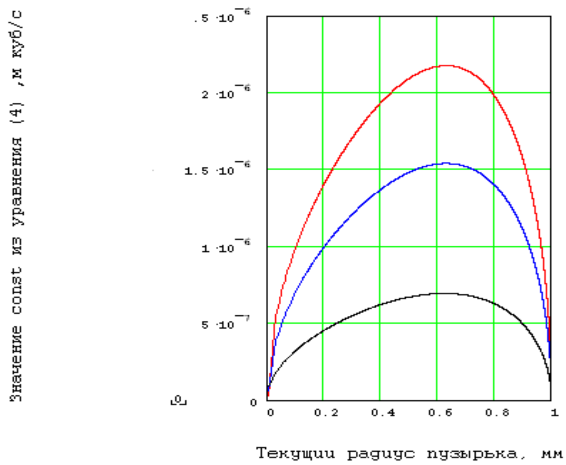

Рис.3.

Зависимость величины A (м^3/с) от радиуса пузырька (мм) для различных параметров k.

При a=0 и a=a_0 это произведение обращается в ноль.Поскольку величина A определяет поле скоростей в окружающей жидкости, то вместе с A на границах интервала обратиться в ноль и скорость в жидкой фазе. Экстремальный характер зависимости A(a) показывает наличие максимума скорости в окружающей жидкости, в каждой её точке:

$$\upsilon_{max}(\mathbf{r,t}) = \frac{\upsilon_{a*}\mathbf{a}_*^2}{\mathbf{r}^2} = \frac{\mathbf{A}_*}{\mathbf{r}^2}$$

Кинетическая энергия жидкости при этой скорости также достигает наибольшего значения:

$$(E_{кин})_{max} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{2}\rho_1\upsilon_{max}^2\,\mathbf{d\varphi d\vartheta dr} = \pi\rho_1\upsilon_{a*}^2\mathbf{a}_*^2$$

После схлопывания пузырька кинетическая

энергия также становится равной нулю, однако, по закону сохранения энергии бесследно она не исчезает, а в результате гидравлического удара преобразуется в упругую энергию некоторого макрообъёма жидкости. Для оценки ударного повышения давления можно считать, что этим макрообъёмом является сфера V_*=(4/3)pa_*^3. Закон Гука для изотермической сжимаемости позволяет рассчитать упругую потенциальную энергию:

$$\mathbf{E}_{\text{пот}} = \frac{1}{2}\chi \mathbf{V}_* \mathbf{P}_{\max}^2 \ ,$$

где c- изотермический коэффициент сжимаемости, c=1¤E, E- объёмный модуль упругости жидкости, P_{max} – ударное повышение давления.

Приравнивая эти энергии, получаем нижнюю границу оценки ударного повышения давления:

$$\mathbf{P}_{\max} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\rho_1 \mathbf{A}_*^2}{\chi \mathbf{a}_*^5}} \qquad (11)$$

Например, для пузырька с начальным радиусом a_0=1 мм, схлопывающегося при k=50 , величина A_*=1,5*10^{-6} м^3/с (рис. 3), a_*=0,6 мм, r_1=1000 кг/м^3, E=2,25*10^9 1/Па, и расчет по формуле (11) дает следующее значение ударного давления: p_{max}=3,12*10^8 Па= 3120 атм.

Возникшая в результате гидравлического удара неравновесная структура порождает ударную волну, давление на фронте которой убывает по закону:

$$\mathbf{P}_{\text{уд}}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_{\max}\frac{\mathbf{a}_*^2}{\mathbf{r}^2} \ .$$

Уже на расстоянии 10a_* от центра исчезнувшего пузырька давление на фронте резко снижается до 3 атм и становится безопасным с точки зрения кавитационной эрозии. Таким образом, наибольшим разрушающим воздействием обладают пузырьки, схлопывающиеся вблизи от кавитирующей поверхности.

Оценку ударного повышения давления при схлопывании кавитационного пузырька можно можно провести и на основе закона сохранения импульса. Действительно, в момент исчезновения пузырька выделим вокруг начала координат сферу с малым радиусом r. Внутри этой сферы жидкость покоится и давление в ней равно D$P_{уд}$. Эту сферу окружает сферический слой толщиной Dr с движущейся жидкостью и количеством движения K_1=-4pr^2r_1Dru_1(r). Через время Dt – время прохождения волной расстояния Dr- это количество движения будет равно нулю K_2=0. Импульс сил давления, действующих по внутренней поверхности сферического слоя за это время составит DP=4pr^2D$P_{уд}$Dt. Приравнивая импульс силы изменению количества движения и учитывая, что c=Dr/Dt, для ударного повышения давления получим известную формулу Жуковского: D$p_{уд}$(r)=r_1cu_1(r). Заменяя здесь скорость по уравнению неразрывности, получим

$$\Delta \mathbf{P}_{\text{уд}}(\mathbf{r}) = \frac{\upsilon_{\mathbf{a}} \mathbf{a}^2}{\mathbf{r}^2}\sqrt{\frac{\rho_1}{\chi}} = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{a})}{\mathbf{r}^2}\sqrt{\frac{\rho_1}{\chi}} \ .$$

Приняв допущение ,что

$$\lim \frac{a^2}{r^2} = 1 \ ,$$

для верхней границы оценки ударного повышения давления получим:

$$\left(\Delta \mathbf{P}_{\text{уд}}\right)_{\max} = (\upsilon_{\mathbf{a}})_{\max}\sqrt{\frac{\rho_1}{\chi}} \ . \qquad (12)$$

Так для пузырька, схлопывающегося при k=50, максимальная скорость составляет u_{amax}=7622 м/с, и эта формула приводит к такому значению ударного давления (D$P_{уд}$)=1,14*10^{10} Па=114000 атм.

Столь значительные расхождения в результатах по формулам (11) и (12) говорит о неполноте чисто гидродинамического описания процесса в дополнение к уже сказанному о сжимаемости жидкости. Кроме того, в формуле (12) отсутствует характерный размер области с начальным ударным давлением, поэтому ничего нельзя сказать о давлении на фронте волны, в отличие от формулы (11).

На рис.4 показаны графики зависимости всех сил, входящих в правую часть уравнения (9), от текущего радиуса пузырька.

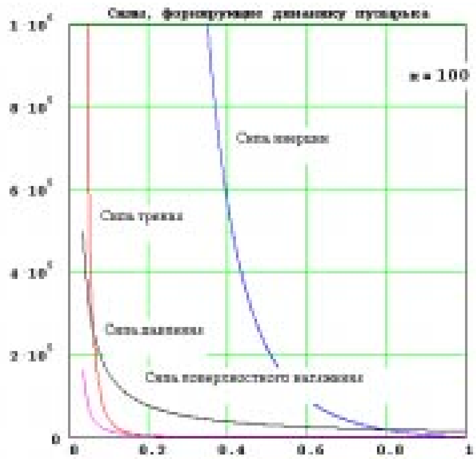

Рис.4. Зависимость сил (Н/кг) правой части уравнения (9) от радиуса пузырька (мм).

Данные графики говорят о том, что на различных стадиях процесса вклад сил различной физической природы неодинаков.

Так, из всех сил доминирующей является силы инерции присоединенных масс (3/2)u_a^2/*a, Н/кг.*

На первой стадии схлопывания пузырька все другие силы – вязкого трения, поверхностного натяжения и давления- много меньше силы инерциии и плавно нарастают, благодаря увеличению скорости и уменьшению радиуса пузырька

На второй стадии начинает резко нарастать сила вязкого трения, пропорциональная скорости межфазной границы, а также в меньшей степени и сила поверхностного натяжения. Возможно, что из-за диссипации энергии происходит разогрев поверхностного слоя жидкости, что вызывает интенсивное испарение воды в пузырек и происходит смягчение гидравлического удара на последней стадии схлопывания пузырька.

Проведенное исследование позволяет сделать вывод, что, не смотря на полученные оценки ударного повышения давления в жидкости, чисто гидродинамический подход не описывает реально протекающих процессов при схлопывании кавитационного пузырька. Полную информацию о подобном процессе можно получить в рамках совокупного описания гидродинамических, тепловых и концентрационных (массовых) полей.

Список использованной литературы

1.Кнепп Р., Дейли Д., Хэммит Ф. Кавитация. М.: Мир, 1974.
2.Емцев Б.Т. Техническая гидродинамика.М.: Машиностроение, 1987.-438 с.
3. Волновая динамика газо – и парожидкостных сред/ В.Е.Накоряков и др./ М.: Энергоатомиздат, 1990.-245 с.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. т.1, т.2. М.: Наука, 1987.-464 и 359 с.
5. Базаров И.П. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1976.-447 с.

Статья поступила в редакцию 24.11.99г.